

Examen Janvier 2017

Durée : 2h - Documents interdits. Une importance particulière sera accordée à la concision ainsi qu'à la propreté de la copie. Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 - Résoudre le problème d'optimisation avec contraintes :

$$\begin{aligned} \min & x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \\ & x + y + z \geq 2, \\ \text{et} & x - 7y + 3z = 14. \end{aligned}$$

Exercice 2 - Déterminer les extrema de classe \mathcal{C}^1 de la fonctionnelle J suivante avec les contraintes indiquées aux extrémités

$$J(u) = \int_0^{\ln 2} (u'(t))^2 + u(t)^2 + 2u(t) dt, u(0) = 3, u(\ln 2) = 2.$$

(on précisera pour chaque extrema trouvé s'il s'agit éventuellement d'un minimum ou d'un maximum, et s'il est local ou global).

Exercice 3 - On cherche à minimiser sur \mathbb{R}^3 la fonction :

$$J(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - x + y - z$$

1. Donner, en le justifiant, la solution exacte au problème considéré.
2. On veut utiliser la méthode du gradient avec une stratégie de type backtracking avec condition d'Armijo pour approcher la solution à partir du point $X_0 = (0, 1, 1)$. Que vaut la direction de descente à la première itération ?

On rappelle que la condition d'Armijo pour un point de départ X_0 et une direction de descente d s'écrit :

$$J(X_0 + \alpha d) \leq J(X_0) + \beta \alpha \langle d, \nabla J(X_0) \rangle.$$

Calculer explicitement puis représenter graphiquement dans le cas présent la fonction $\alpha \mapsto J(X_0 + \alpha d)$ ainsi que les valeurs de α vérifiant la condition d'Armijo pour $\beta = 0.1$.

3. On prend $\alpha_{init} = 1$ et $\tau = 0.1$ (constante de backtracking).
Que vaut X_1 ?

Exercice 4 - On propose l'algorithme suivant pour la minimisation d'une fonction f :

```
x=-20+30*rand(); // point initial
Niter=2000;alpha=0.5;Ytot=[]
for i=1:Niter
    y1=f(x);
    xtilde=x+(-alpha+2*alpha*rand())
    y2=f(xtilde)
    p=exp(-(y2-y1)/(1/log(i+1)));
    if (rand())<p then
```

```
    x=xtilde;
end
end
disp('valeur finale obtenue pour x:')
disp(x)
```

1. Expliquer le fonctionnement global de ce programme ainsi que les instructions aux lignes 5, 7 et 8.
2. Que représente dans ce programme le paramètre α ?
3. Que représente le terme $1/\log(i + 1)$ et pour quelle raison a-t-il été choisi ainsi ? Proposer un autre choix possible.