Université de Versailles | Année 2019-2020
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MINT-optim.html` | semestre 1

CC1: optimisation

Exercice 1

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et le vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ définis par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la fonctionnelle J telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad J(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$$

possède un unique minimum sur l'ensemble

$$V = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 + x_3 = 0\}$$

2. En écrivant les conditions KKT, déterminer ce minimum.

Exercice 2

On considère une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^1, minorée par $m \in \mathbb{R}$ et de gradient L-Lipschitzien, c'est à dire:

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad ||\nabla f(y) - \nabla f(x)|| \leq L||x - y||$$

On considère la méthode du gradient à pas fixe: $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et

$$x_{k+1} = x_k - s\nabla f(x_k)$$

où le pas s est tel que

$$0 < s < \frac{2}{L}$$

1. On note $g(t) = f(x_k - t\nabla f(x_k))$ pour $t > 0$. Montrer que

$$\forall t > 0, \quad |g'(t) - g'(0)| \leq L||\nabla f(x_k)||^2 t$$

2. En intégrant cette relation, montrer qu'on a

$$s(1 - \frac{L}{2}s)||\nabla f(x_k)||^2 \leq f(x_k) - f(x_{k+1})$$

En déduire qu'il s'agit bien d'une méthode de descente.

3. En utilisant une série convergente, montrer qu'on a $\lim_{k \to \infty} \nabla f(x_k) = 0$

4. Quel choix de valeur pour s vous parait optimal (c'est à dire assurant la décroissance la plus rapide pour f) ?

Exercice 3 On étudie le script Scilab suivant de minimisation d'une fonctionnelle J:

```
function y=J(x)
  y=10*(x(2)-x(1)^2)^2+(x(1)-1)^2;
endfunction
function y=nablaJ(x)
  y=[-40*x(1)*(x(2)-x(1)^2)+2*(x(1)-1);20*(x(2)-x(1)^2)];
endfunction
beta=0.0001; alphainit=1; tau=0.7; epsilon=1E-3;
n=2; x=[0;1];
Jx=J(x); gx=nablaJ(x);
count=1;
B=eye(n,n);
while (norm(gx)>epsilon) &(count<200)
   p=-inv(B)*gx;
   alpha=alphainit;
   while(J(x+alpha*(p))>Jx+beta*alpha*(p'*gx))
     alpha=tau*alpha;
   end
   xold=x; gxold=gx;
   x=x+alpha*p;
   Jx=J(x); gx=nablaJ(x);
   count=count+1;
   y=(gx-gxold);s=x-xold;
   B=B+(1/(s'*y))*y*y'-(1/(s'*(B*s)))*B*s*s'*B;
end
disp('final value of x:');disp(x)
disp('iteration number');disp(count)
```

1. Ecrire la relation mathématique donnant x_{k+1} en fonction de x_k et x_{k-1}?
2. Quel critère d'arrêt mathématique est utilisé pour cet algorithme?
3. Montrer que la matrice B définie dans le script est une matrice symétrique.
4. Quel est l'objectif visé à travers la construction de B?
5. Le programme retourne les informations:

   ```
   final value of x:
      0.9999966
      0.9999925
    iteration number
      19.
   ```

   Commenter ce résultat.