

TD 6: révisions

Exercice 1.

On considère la fonction u définie sur \mathbb{R}^2 par

$$u(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2,$$

où a et b sont deux réels On note

$$H = \{(x, y) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}, y^2 - x^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 2\}$$

1. Montrer que u est strictement convexe sur \mathbb{R}^2 et qu'elle possède un unique minimum sur H .
2. En écrivant les relations de KKT, déterminer le point où u atteint son minimum sur H .

Exercice 2.

Soit A une matrice symétrique définie positive, On cherche à minimiser une fonctionnelle quadratique $J : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$J(X) = \frac{1}{2} \langle AX, X \rangle - \langle b, X \rangle$$

sous la contrainte $\langle c, X \rangle = 0$ avec b et c deux vecteurs de \mathbb{R}^3 .

Pour cela, on s'intéresse au script Scilab suivant :

```
n=3;
A=[3, 2, 0; 2, 2, 0; 0, 0, 2]
b=[1; -1; 1]
m=1;
C=[2, -3, 1]
//
// solution exacte
//
M=[A, C'; C, zeros(m, m)]; bb=[b; zeros(m, 1)];
X=inv(M)*bb;
Xex=X(1:n);
//
disp('solution exacte'); disp(Xex);
//
// solution approch'ee
//
Niter=100; rho=0.1; alpha=0.1;
//
X=[0; 1; 1]
mu=1;
```

```
//
for i=1:Niter
    X=X-rho*(A*X-b+C'*mu);
    mu=mu+alpha*C*X;
end
disp('solution approch\'ee);disp(X)
```

1. Montrer que la fonction J possède un unique minimum et que celui-ci est global.
2. Calculer la solution exacte X_{ex} du problème en question dans le script.
3. Quel algorithme approché est utilisé dans la deuxième partie du script ?
4. Expliquer la ligne $X=X-rho*(A*X-b+C'*mu)$.

Exercice 3.

La méthode du classement stochastique décrite ci-dessous permet de classer λ individus dans un problème d'optimisation avec contrainte.

```
1   $I_j = j \forall j \in \{1, \dots, \lambda\}$ 
2  for  $i = 1$  to  $\lambda$  do
3      for  $j = 1$  to  $\lambda - 1$  do
4          sample  $u \in U(0, 1)$  (uniform random number generator)
5          if  $(\phi(\mathbf{x}_{I_j}) = \phi(\mathbf{x}_{I_{j+1}}) = 0)$  or  $(u < P_f)$  then
6              if  $f(\mathbf{x}_{I_j}) > f(\mathbf{x}_{I_{j+1}})$  then
7                  swap( $I_j, I_{j+1}$ )
8              fi
9          else
10             if  $\phi(\mathbf{x}_{I_j}) > \phi(\mathbf{x}_{I_{j+1}})$  then
11                 swap( $I_j, I_{j+1}$ )
12             fi
13         fi
14     od
15 if no swap done break fi
od
```

Fig. 2. Stochastic ranking procedure, $P_f = 0.45$.

Dans cet algorithme, f est la fonction cot minimiser et Φ la pénalisation et P_f est un paramètre.

1. Que se passe-t-il quand $P_f = 0$, respectivement 1 ?
2. Écrire une fonction Scilab de classement alternatif de λ individus pour une fonction f et une pénalisation Φ données.

Exercice 4.

Donner deux différences et deux similitudes entre une stratégie d'évolution et un algorithme génétique.