TP 3: optimisation globale

L'objectif de ces deux séances est d'utiliser le logiciel Scilab (ou Matlab, ou Python) afin de comparer différents algorithmes de recherche du minimum global d'une fonction $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par des méthodes stochastiques de type métaheuristiques. On pourra tester dans chacun des cas le résultat obtenu sur la fonction de Rastrigin en dimension $n \geq 2$:

$$J(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - \cos(2\pi x_i)\right) + n$$

et sur la fonction de Rosenbrock en dimension 2 :

$$J(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (x_1 - 1)^2$$

Exercice 1

On cherche à programmer tout d'abord la méthode du recuit simulé.

Ecrire une fonction Scilab ayant pour arguments J, sig (l'écart type dans le calcul du voisin suivant une loi normale) $Nmax$ (le nombre maximum d'itérations) q, N (le type de décroissance de la température : géométrique de raison q par paliers de longueur N) a, b (les bornes de l'initialisation) et n et renvoyant la meilleur approximation obtenue.

Appliquer l'algorithme du recuit simulé sur le problème de Rastrigin.

Exercice 2

Un exemple d'algorithme génétique et de stratégie d'évolution peut être téléchargé sur le site web du cours.

Modifier la méthode de stratégie d'évolution en rajoutant un principe d'adaptativité pour le paramètre σ de cette méthode :

— Premier principe : la loi du $1/5$. Dans ce cas, le paramètre σ est fixé initialement et évolue suivant le taux de succès τ à la génération précédente :

$$\sigma \to \exp\left(\frac{1}{3}\frac{\tau - \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}}\right)\sigma$$

— Second principe : l'adaptation de la matrice de covariance. Dans un premier temps la mutation est rendue non isotrope en remplaant σ par une matrice de covariance définie positive (on utilisera l'option `grand(n, "mn", Mean, Cov)` de l'instruction `grand`). Celle-ci évolue ensuite suivant le principe décrit sur la page suivante (ref : M. Cerf)

Appliquer l'algorithme de stratégie d'évolution avec adptation des paramètres au cas de la fonction de Rosenbrock. Vrifier dans le second cas que la matrice C se rapproche (à une constante près) de l'inverse de la matrice Hessienne de J.

Itération CMAES

- Mise à jour de m, C, σ

$$m \;\rightarrow\; m + \sigma d \quad \text{avec } d = \sum_{j=1}^{q} w_j y_j$$

$$\sigma \;\rightarrow\; \alpha_\sigma \sigma \qquad \text{avec } \alpha_\sigma = e^{\frac{1}{3}\cdot\frac{\tau-\tau_s}{1-\tau_s}}, \tau_s = 1/5$$

$$C \;\rightarrow\; (1-\alpha_q-\alpha_d)C + \alpha_q C_q + \alpha_d C_d$$

$$C_q = \sum_{j=1}^{q} w_j \left(y_j . y_j^T\right) \;\rightarrow\; \text{rang } q$$

$$C_d = d.d^T \qquad \rightarrow\; \text{rang } 1$$