

Examen session 1: optimisation numérique

Exercice 1

Soit la fonction.

$$J(x, y) = x^4 + y^2 + 2xy$$

à minimiser sur l'ensemble

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \leq 1 \text{ et } x + y \leq 1\}$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble D .
2. Montrer que le point $(0, 0)$ n'est pas un minimum local de J sur D .
3. Montrer que J possède un minimum global sur D .
4. Ecrire les relations KKT et en déduire l'ensemble des minima locaux de J sur D .

Exercice 2

On cherche à utiliser une méthode de gradient à pas optimal pour minimiser la fonctionnelle quadratique sur \mathbb{R}^n suivante :

$$J(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$$

avec A une matrice symétrique de taille n , de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

1. Justifier qu'un pas de cette méthode va s'écrire

$$x_{k+1} = x_k - \rho_k d_k$$

avec $d_k = \nabla J(x_k)$ et $\rho_k = \frac{\|d_k\|^2}{\langle Ad_k, d_k \rangle}$. On pourra exprimer le fait que $\rho \mapsto J(x_k - \rho d_k)$ est minimale en ρ_k .

2. Montrer que deux directions consécutives sont orthogonales, à savoir $\langle d_{k+1}, d_k \rangle = 0$.
3. On note x^* le minimum de J sur \mathbb{R}^n . On admet qu'il est possible de démontrer les deux inégalités suivantes :

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \|x_{k+1} - x_k\|$$

et

$$J(x_k) - J(x_{k+1}) \geq \frac{\lambda_1}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

Montrer que la méthode du gradient à pas optimal est convergente.

4. Ecrire une fonction Scilab, s'appelant `x = GPO (A, b, x0, N)` et calculant la N-ième itération d'une méthode du gradient à pas optimal.

Exercice 3 -

L'opérateur de mutation d'un algorithme génétique a été écrit sous cette forme :

```
function Amut=mutation(A,s,p)
    [N,n]=size(A);
    Amut=A;
    for i=1:N
        if rand()<p then
            Amut(i,:)=A(i,:)+s*rand(1,n)
        end
    end
endfunction
```

1. Donner deux exemples de résultat possible si on exécute l'instruction :
`mutation([1,2,3;2,0,2],0.1,1)`
2. La ligne 6 présente un défaut majeur. Corriger cette ligne de deux manières possibles afin de rendre l'opérateur de mutation pertinent.
3. Quelles sont les rôles respectifs des paramètres **s** et **p** et quelles valeurs extrêmes peuvent-ils prendre ?
4. Proposer deux stratégies possibles (sans écrire le code Scilab) afin de rendre adaptatif le paramètre **s**.