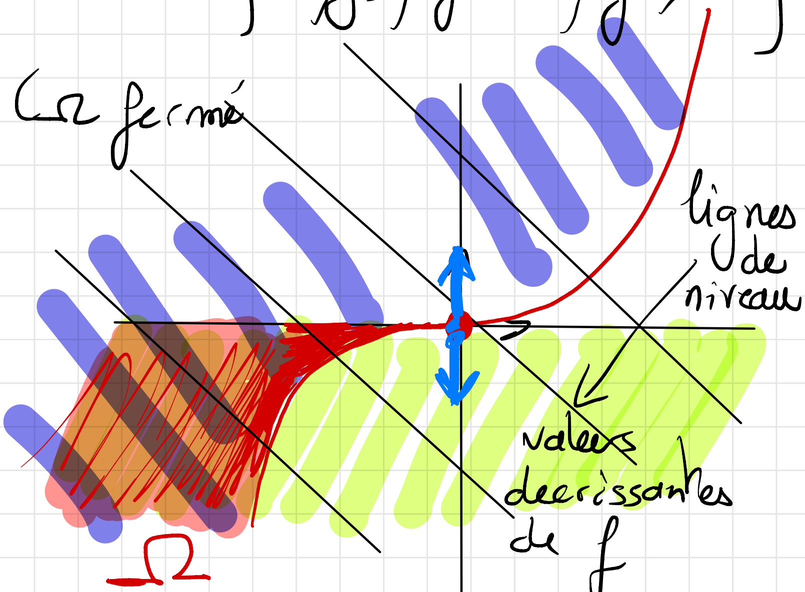
CC1 (parties 1 et 2) : corrigé

Ex 1)

1 et 2) $f(x,y) = x+y$ à maximiser sur

$$\Omega = \{(x,y),\ y \le 0,\ y \geq x^3\}$$

(Ω fermé



Maximum de f sur Ω situé en $(0,0)$

(graphiquement)

(en effet $x+y \le x \le 0$ sur Ω)

3) $\mathcal{L}(x,y) = x+y + \mu(y) + \nu(x^3-y)$

KKT : $(x^*,y^*), \mu^*, \nu^*)$ solutions de :

$$\begin{cases} 1 + 3x^2\nu = 0 \\ 1 + \mu - \nu = 0 \\ \mu \le 0 \\ \nu \le 0 \\ y \le 0 \\ y \geq x^3 \\ \text{et } \mu = 0 \text{ si } y < 0 \\ \nu = 0 \text{ si } y > x^3 \end{cases}$$

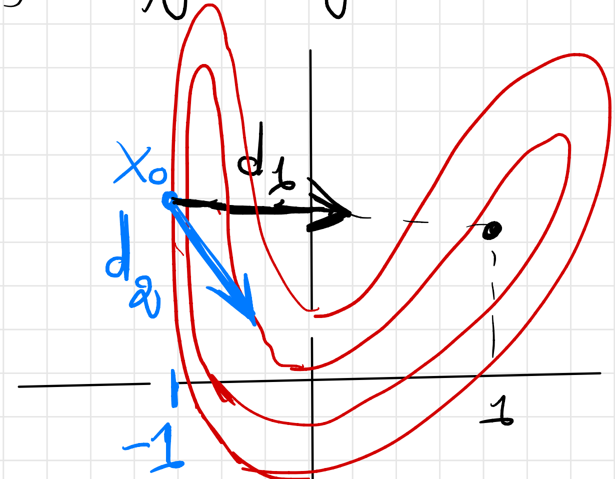
maximum

Le point $(x^*,y^*)=(0,0)$ ne peut vérifier KKT (voir equation 1) alors qu'il s'agit d'un point de maximum de f sur Ω. Cela vient du fait que les contraintes ne sont pas qualifiées au point $(0,0)$. En effet :

$$\begin{cases}\nabla c_{I_1}(0,0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ \text{et } \nabla c_{I_2}(0,0)=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\end{cases}$$

et $(\nabla c_{I_1}, \nabla c_{I_2})$ non libre.

2) $J(x,y)=100(y-x^2)^2+(x-1)^2$



Direction du gradient en X_0 :

$$\nabla J(x,y)=\begin{pmatrix}-400x(y-x^2)+2(x-1)\\200(y-x^2)\end{pmatrix}$$

et $d_1=-\nabla J(X_0)=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$

(Toujours une descente car $\langle d_1,\nabla J(X_0)\rangle<0$)

Direction de Newton en X_0 :

$$HJ(x,y) = \begin{pmatrix} -400y+1200x^2+2 & -400x \\ -400x & 200 \end{pmatrix}$$

soit

$$HJ(X_0) = \begin{pmatrix} 802 & 400 \\ 400 & 200 \end{pmatrix}$$

et

$$d_1 = \left(-HJ(X_0)\right)^{-1} \cdot \nabla J(X_0)$$

soit $\begin{pmatrix} 802 & 400 \\ 400 & 200 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 802\alpha + 400\beta = 4 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -4 \end{cases}$$ soit $d_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\langle d_2, \nabla f(X_0) \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = -8 < 0$$

et d_2 est bien une direction de descente.

(aussi : $HJ(X_0) >> 0$ par Sylvester)

Ex 3)

1) f coercive sur $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ existence d'un minimum global

f strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ unicité d'un minimum (local ou global)

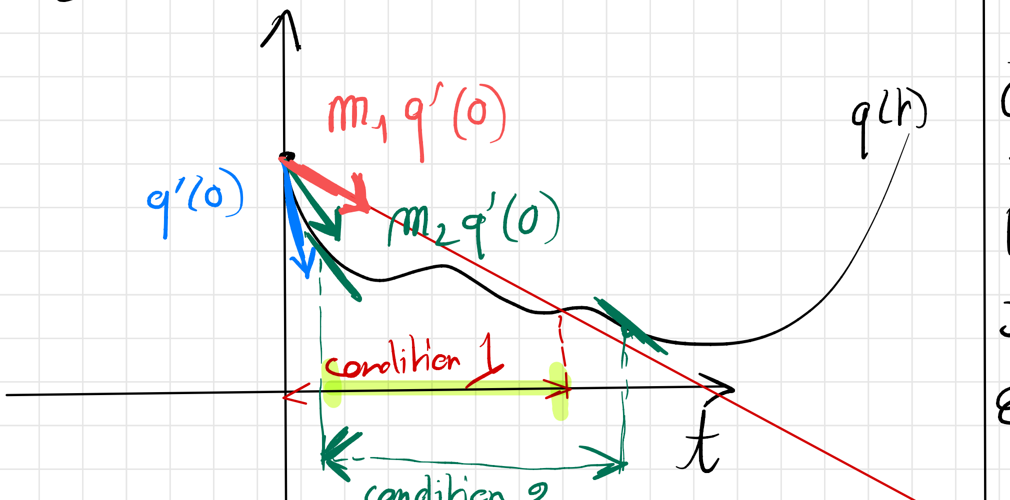
$\rightarrow$ existence et unicité de x^* minimum local de f sur $\mathbb{R}^n$. Il vérifie nécessairement :

$$\nabla f(x^*) = 0$$

2) $q(t) = f(x_k + t g_k)$

et t_k vérifie

$$\begin{cases} q(t_k) \le q(0) + m_1 t_k q'(0) \text{ (Armijo)} \\ q'(t_k) \ge m_2 q'(0) \quad (0 < m_1 < m_2 < 1) \end{cases}$$



Remarque : si il existe k tq $g_k = 0$, on a convergé vers x^* en un nombre fini d'étapes.

3.1) $q'(0) = \langle g_k, \nabla f(x_k) \rangle$
$= -\|g_k\|^2$

3.2)

$$m_1 \|g_k\| \|x_{k+1} - x_k\| \overset{?}{\le} f(x_k) - f(x_{k+1})$$

En effet, par Armijo :

$$f(x_{k+1}) \le f(x_k) - m_1 t_k \|g_k\|^2$$

soit le résultat puisque

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|t_k g_k\| = t_k \|g_k\|$$

3.3) $(1 - m_2)\|g_k\| \overset{?}{\le} L(\|x_{k+1} - x_k\|)$

En effet, avec la condition 2

$$\underbrace{\langle \overbrace{g_k}^{-\nabla f(x_k)}, \nabla f(x_{k+1}) \rangle}_{q'(r_k)} \geq -m_2 \|g_k\|^2$$

De plus

$$\langle g_k, \nabla f(x_k) \rangle = -\|g_k\|^2$$

En soustrayant, on trouve

$$\langle g_k, \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) \rangle \geq (1-m_2) \|g_k\|^2$$

puis par Cauchy Schwarz :

$$(1-m_2)\|g_k\|^2 \leq \|g_k\| \|\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)\|$$

$$\leq \|g_k\| \left(L \|x_{k+1} - x_k\| \right)$$

∇f L-Lipschitz sur S_{x_0} et

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) \leq \dots \leq f(x_0) \quad (x_k \in S_{x_0})$$

3.4) On déduit de 3.2 et 3.3 :

$$L(f(x_k) - f(x_{k+1})) \geq m_1 \|g_k\| (1-m_2) \|g_k\|$$

En sommant, on obtient

$$L(f(x_0) - f(x_N)) \geq m_1 (1-m_2) \sum_{k=0}^{N} \|g_k\|^2$$

Or f est minorée et donc

$\sum_{k=0}^{N} \|g_k\|^2$ est majorée donc convergente.

On en déduit $\lim_{k \to +\infty} \nabla f(x_k) = 0$

De plus (x_k) bornée. De plus, elle possède une seule valeur d'adhérence

(on a $\nabla f(l) = 0$ soit $l = x^*$)

$\Rightarrow$ (x_k) converge vers x^* //