TD4 : optimisation locale avec contraintes

Ex 1)

1) Contexte : $J(x) = \frac{1}{2} {}^t x A x - {}^t b x$ avec $A >> 0$ et $b \in \mathbb{R}^n$

sous les contraintes $Cx = d$ où

$C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ $(p < n)$

→ Ω est non borné car $\dim(\operatorname{Ker} C) > 0$ (si $\Omega \neq \emptyset$) et ainsi si $x_0 \in \Omega$, alors $x_0 + \underbrace{\operatorname{Ker} C}_{sev} \subset \Omega$

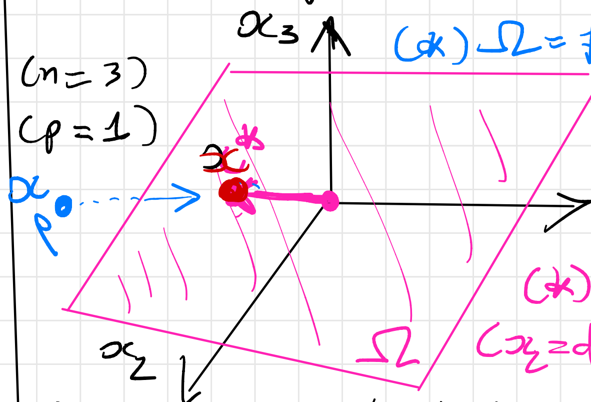
→ J est coercive sur $\mathbb{R}^n$. En effet,

$$J(x) \geq \frac{1}{2} \lambda_1 \|x\|^2 - \|b\| \|x\| \ (\to +\infty)$$

(où $\lambda_1 > 0$ plus petite valeur propre de A)

→ Ω est fermé (sous espace affine) $(*)$

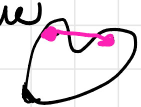
$(*)$ $\Omega = f^{-1}(\{0\})$ où $f(x) = Cx - d$ est C^0



$(*)$ si $Cx_1 = d$ et $Cx_2 = d$, alors $C(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) = d$

À ce stade, on déduit l'existence d'un minimum de J sur Ω.

→ J est strictement convexe car $HJ(x) = A >> 0$ sur Ω convexe $(*)$, on en déduit que ce minimum est unique.



2) Les contraintes sont toutes actives en x^*. On ne peut donc écrire $\nabla J(x^*) = 0$.

KKT : on a

$$\mathcal{L}(x, \underset{\in \mathbb{R}^p}{\lambda}) = \frac{1}{2}\,{}^t x A x - {}^t b x + \langle \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}^p}, \underbrace{(Cx-d)}_{\in \mathbb{R}^p} \rangle$$

$\underbrace{\langle \lambda, Cx\rangle - \langle \lambda, d\rangle}$

$$= \frac{1}{2}\,{}^t x A x - {}^t b x + {}^t\lambda (Cx - d)$$

$$\nabla_x \mathcal{L}(x,\lambda) = \underset{n\times 1}{Ax} - \underset{n\times 1}{b} + \underset{n\times p}{{}^t C}\,\underset{p\times 1}{\lambda} \quad \Big(\text{car}$$

$$\underbrace{\langle \lambda, Cx \rangle}_{{}^t\lambda . Cx} = \langle {}^t C\lambda, x \rangle \Big)$$

ou

${}^t x\,{}^t C \lambda$ soit $\langle x, {}^t C\lambda \rangle$

Comme x^* est un minimum et que la qualification en x^* est assurée (car $\mathrm{rg}\, C = p$ est maximal), alors il vérifie KKT : il existe donc $\lambda^* \in \mathbb{R}^p$ tq

$$\begin{cases} * \ \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0 \\ * \ Cx^* = d \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} & n & p \\ \hline n & A & {}^t C \\ p & C & 0 \end{array} \quad \begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

soit

$$\boxed{\begin{cases} Ax^* - b + {}^t C \lambda^* = 0 \\ Cx^* = d \end{cases}}$$

Unicité de λ^* : ${}^t C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, par le théorème du rang :

$$n = \dim(\mathrm{Im}\,{}^t C) + \dim(\mathrm{Ker}\,{}^t C)$$

Or, $\dim(\mathrm{Im}({}^tC)) = p$

$${}^tC = \overset{p}{\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}} \; n$$

Ceci implique $\dim(\mathrm{Ker}\, {}^tC) = 0$ soit ${}^tC$ injective. Ainsi

$${}^tC\lambda^* = b - Ax^*$$

implique que λ^* est unique.

Ex 2)

1) $J_\varepsilon(x) = J(x) + \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\|Cx-d\|^2}_{\geq 0}$

* J est coercive sur $\mathbb{R}^n$

(mais $\|Cx-d\|^2$ ne l'est pas...

A fortiori, comme $\|Cx-d\|^2 \geq 0$)

J_ε est aussi coercive $\Rightarrow$ existence de x_ε.

* Calcul de $\nabla_x J_\varepsilon$:

$J_\varepsilon(x) = J(x) + \frac{\varepsilon}{2}\langle Cx-d, Cx-d\rangle$

$= J(x) + \frac{\varepsilon}{2}\left[\underbrace{\langle Cx, Cx\rangle}_{\langle {}^tCCx,\, x\rangle} - 2\underbrace{\langle d, Cx\rangle}_{\langle {}^tCd,\, x\rangle} + \langle d, d\rangle\right]$

$\Rightarrow \nabla J_\varepsilon(x) = Ax - b + \frac{\varepsilon}{2}\left({}^tCCx - 2\,{}^tCd\right)$

puis

$HJ_\varepsilon(x) = \underbrace{\overbrace{A}^{\gg 0}}_{n\times n} + \frac{\varepsilon}{2}\overbrace{\underbrace{{}^tC}_{n\times p}\underbrace{C}_{p\times n}}^{\geq 0}$

(car ${}^tx({}^tCC)x = \|Cx\|^2 \geq 0$)

D'où $HJ_\varepsilon(x) \gg 0$ et J_ε strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$

$\rightarrow$ unicité de x_ε.

2) J_ε est minimale en x_ε.

En particulier

$J_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(x^*) = J(x^*) + 0$

soit

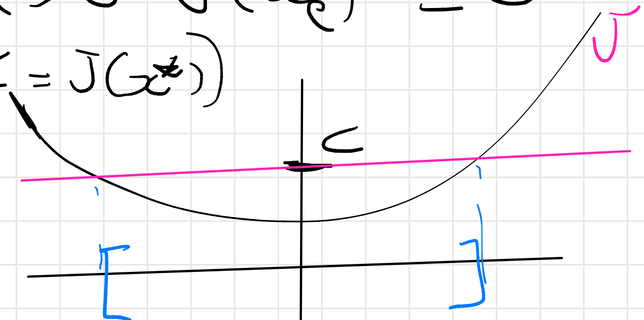
$J(x_\varepsilon) + \overbrace{\frac{\varepsilon}{2}\|Cx_\varepsilon - d\|^2}^{\geq 0} \leq J(x^*)$

soit $J(x_\ell) \le J(x^*)$

3) On a $\exists C \in \mathbb{R}$ tq

$\forall \ell > 0 \quad J(x_\ell) \le C$ (*)

($C = J(x^*)$)



Par l'absurde, il existe une sous suite (x_{ℓ_n}) tq $\|x_{\ell_n}\| \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Or J est coercive, on a donc forcément $J(x_{\ell_n}) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, ce qui est absurde avec (*)

4) On suppose que $x_{\ell_n} \to \hat{x}$. On cherche à montrer que $\hat{x} = x^*$.

Comme $J(x_\ell) \le J(x^*)$, par passage à la limite $J(\hat{x}) \le J(x^*)$

Il reste à montrer que $\hat{x} \in \Omega$, c'est à dire $C\hat{x} = d$ (on en conclut que $\hat{x} = x^*$ car x^* est l'unique minimum de J sur Ω)

Or $\ell_n \to +\infty$ et

$$\underbrace{J_{\ell_n}(x_{\ell_n})}_{\text{minimum de } J_{\ell_n}} = \underbrace{\underbrace{J(x_{\ell_n})}_{\le J(x^*)}}_{\text{borné}} + \underbrace{\frac{\ell_n}{2}}_{\downarrow \; +\infty} \underbrace{\|Cx_{\ell_n} - d\|^2}_{\downarrow \; \|C\ell - d\|^2}$$

Si $C\ell - d \neq 0$, on a donc

$$J_{\rho_n}(x_{\rho_n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

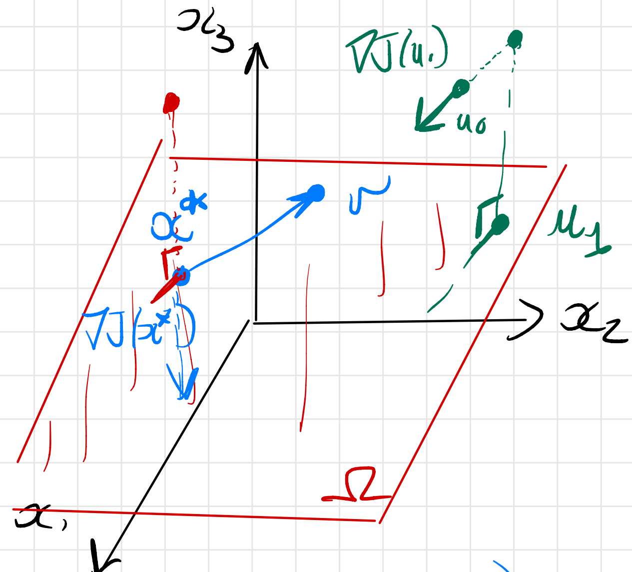
Or $J_{\rho_n}(x_{\rho_n}) \leq \underbrace{J(x^*)}_{\text{fixe!}}$

ce qui est absurde.

5) (x_{ρ_n}) est une suite bornée et qui possède 1 seule valeur d'adhérence égale à x^*. Par Bolzano-Weierstrass, elle converge vers x^* (quand $n \to +\infty$ et $\rho_n \to +\infty$)

Ex 3) (gradient projeté)

$n = 3$
$p = 1$



$$u_{k+1} = P_\Omega\big(\underbrace{u_k - \rho \nabla J(u_k)}\big)$$

$P_\Omega : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto P_\Omega(x) \end{pmatrix}$ projection orthogonale sur Ω convexe fermé de $\mathbb{R}^n$

1) Montrer que x^* est tel que :

$$\forall v \in \Omega,\ \langle \nabla J(x^*), v - x^* \rangle \geq 0$$

(en déduire : $x^* = P_\Omega(x^* - \rho \nabla J(x^*))$)

Indication : traduire le fait que x^* est le minimum de J sur Ω.

$$\forall v \in \Omega,\ J(x^*) \leq J(v)$$

Or $J(v) = J(x^*) + \langle \nabla J(x^*), v - x^* \rangle + o(\|v - x^*\|)$

en prenant $y = x^* + t(v - x^*)$ $(\in \Omega)$ et en faisant tendre t vers 0^+, on a

$$\underbrace{J(y)}_{\geq J(x^*)} = J(x^*) + t(\langle \nabla J(x^*), v - x^* \rangle + o(1))$$

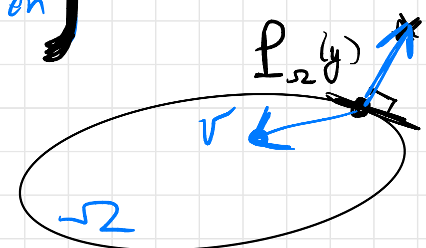
soit $t(\langle \nabla J(x^*), v - x^* \rangle + o(1)) \geq 0$

on obtient

$$\langle \nabla J(x^*), v - x^* \rangle \geq 0$$

(en réalité, c'est égal à 0 avec $t \to 0^-$)

Ainsi, en utilisant la caractérisation de la projection :



$$(\forall v \in \Omega,\ \langle v - P_\Omega(y), y - P_\Omega(y) \rangle \leq 0)$$

On prend $y = x^* - \rho \nabla J(x^*)$ et on calcule :

$$\langle v - x^*, x^* - \rho \nabla J(x^*) - x^* \rangle =$$

$= < v - x^*, -\rho \nabla J(x^*) > \leq 0$

d'après le résultat précédent.

Comme $x^* \in \Omega$ et x^* vérifie la caractérisation de la projection par $y = x^* - \rho \nabla J(x^*)$, on en déduit que $\boxed{x^* = P_\Omega(x^* - \rho \nabla J(x^*))}$

2) $\boxed{u_{k+1} = P_\Omega(u_k - \rho \nabla J(u_k))}$

$u_k \to x^*$ si $\rho < \frac{2}{\lambda_n}$ où

λ_n : plus grande valeur propre de A.

$(J(x) = \frac{1}{2} {}^t x A x - {}^t b x)$

Il s'agit d'un problème de point fixe

par la fonction

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto P_\Omega(x - \rho \nabla J(x)) \end{pmatrix}$$

On cherche à montrer que f est strictement contractante :

si x et $y \in \mathbb{R}^n$, alors

$\|f(x) - f(y)\| = \|P_\Omega(x) - P_\Omega(y)\|$

$\leq \|(x - \rho \nabla J(x)) - (y - \rho \nabla J(y))\|$

$\uparrow$

(P_Ω 1 Lipschitzienne)

$\leq \|(x - \rho(Ax - b)) - (y - \rho(Ay - b))\|$

$\uparrow$

$\nabla J(x) = Ax - b$

$\ldots \leq \| (I - \rho A)(x-y) \|$

Or $I - \rho A$ est une matrice symétrique ayant par valeurs propres $\{1-\rho\lambda_i, 1 \leq i \leq n\}$

Comme $\rho > 0$,

$$1-\rho\lambda_n \leq \ldots \leq 1-\rho\lambda_1$$

On a $1-\rho\lambda_1 < 1 \ (\lambda_1 > 0)$

De plus si $\rho < \frac{2}{\lambda_n}$, $1-\rho\lambda_n > -1$

On en déduit finalement que si $0 < \rho < \frac{2}{\lambda_n}$,

$\| f(y) - f(x) \| \leq K \| y - x \|$ où $K \in]0,1[$.

Par le théorème de point fixe de Picard, on a donc $u_k \to x^*$ pt fixe de f.

* Remarque

1) Contrairement à la méthode précédente, la suite des itérations se situe dans le domaine admissible.

2) Dans le cas présent, il est possible de calculer assez simplement P_Ω (ce qui n'est pas le cas en général)

3) le résultat de convergence (et les conditions sur le pas) est similaire au résultat correspondant sans contraintes.

Ex4) (Uzawa)

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = \frac{1}{2}\,{}^t x A x - {}^t b x + \overbrace{{}^t\lambda (Cx - d)}^{{}^t({}^tC\lambda)x - {}^t\lambda d}$$

* (x^*, λ^*) est solution de KKT :

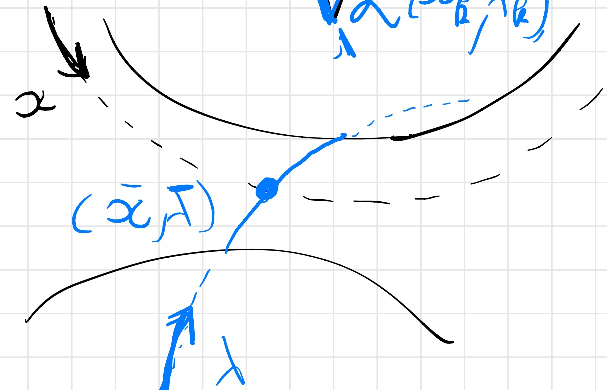
$$\left.\begin{aligned} Ax^* + {}^tC\lambda^* &= b \\ Cx^* &= d \end{aligned}\right\}$$

* Algorithme proposé : (λ_0, u_0) fixés $\in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} \lambda_{k+1} &= \lambda_k + \rho(Cu_k - d) \\ Au_{k+1} &= b - {}^tC\lambda_{k+1} \end{aligned}\right.}$$

S'agit-il bien d'un algorithme de recherche d'un point selle de $\mathcal{L}$?

* $$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho\underbrace{(Cu_k - d)}_{\nabla_\lambda \mathcal{L}(x_k, \lambda_k)}$$



→ itération d'une méthode de gradient par maximisation de $\mathcal{L}(\lambda)$

* $Au_{k+1} = b - {}^tC\lambda_{k+1}$

$\left(\begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathcal{L}(x, \lambda_{k+1}) \end{array}\right)$ a par minimum u tq $Au = b - {}^tC\lambda$: résolution exacte de minimisation de $\mathcal{L}(x)$

1) On doit montrer :

$$\boxed{\|\lambda_{k+1}-\lambda^*\|^2 \leq \|\lambda_k-\lambda^*\|^2 + (\rho^2\|C\|^2 - 2\rho\tilde{\lambda}_1)\|u_k - x^*\|^2}$$

où $\|C\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Cx\|}{\|x\|}$ et $\tilde{\lambda}_1$: plus petite valeur propre de A.

On a :

$$\begin{cases} \lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho(Cu_k - d) \\ Au_{k+1} = b - {}^tC\lambda_{k+1} \end{cases}$$

On calcule

$$\lambda_{k+1} - \lambda^* = \lambda_k - \lambda^* + \rho(\underbrace{Cu_k - d}_{C(u_k - x^*)})$$

On élève au carré et on développe :

$$\|\lambda_{k+1}-\lambda^*\|^2 = \|\lambda_k - \lambda^*\|^2 + \rho^2\|C(u_k - x^*)\|^2 + 2\rho\langle \lambda_k - \lambda^*, C(u_k - x^*)\rangle$$

puis

$$\|\lambda_{k+1} - \lambda^*\|^2 \leq \|\lambda_k - \lambda^*\|^2 + \rho^2\|C\|^2\|u_k - x^*\|^2 + 2\rho\langle {}^tC(\lambda_k - \lambda^*), (u_k - x^*)\rangle$$

Or, $Ax^* = b - {}^tC\lambda^*$, on a donc :

$A(u_k - x^*) = -{}^tC(\lambda_k - \lambda^*)$ et :

$$\langle {}^tC(\lambda_k - \lambda^*), u_k - x^*\rangle = -\langle A(u_k - x^*), u_k - x^*\rangle$$

Comme les valeurs propres de A sont $0 < \tilde{\lambda}_1 \leq \dots \leq \tilde{\lambda}_n$, il vient :

$$-\langle A(u_k - x^*), u_k - x^*\rangle \leq -\tilde{\lambda}_1\|u_k - x^*\|^2$$

2) On prend ρ tq

$$\rho^2\|C\|^2 - 2\rho\tilde{\lambda}_1 < 0$$

//

soit

$$0 < \rho < \frac{2\tilde{\lambda}_1}{\|C\|^2},$$ alors, en notant

$$\beta = \rho^2\|C\|^2 - 2\rho\tilde{\lambda}_1 < 0,$$ on a

$$\|\lambda_{k+1} - \lambda^*\|^2 \leq \underbrace{\|\lambda_k - \lambda^*\|^2 + \underbrace{\beta}_{<0}\|u_k - u^*\|^2}_{\leq 0}$$

On en déduit donc que

$\|\lambda_{k+1} - \lambda^*\| \leq \|\lambda_k - \lambda^*\|$ et que la suite $k \mapsto \|\lambda_k - \lambda^*\|$ est décroissante minorée donc convergente vers $\ell \geq 0$.

Or

$$0 \leq -\beta\|u_k - u^*\|^2 \leq \underbrace{\|\lambda_k - \lambda^*\|^2}_{\to \ell} - \underbrace{\|\lambda_{k+1} - \lambda^*\|^2}_{\to \ell}$$

Par encadrement, on a $\lim_{k \to +\infty} \|u_k - u^*\|^2 = 0$

soit $$\boxed{\lim_{k \to +\infty} u_k = u^*}$$

Remarque : comme C est de $\underbrace{\text{rang maximal}}_{\text{injective}}$, on a également

$${}^tC(\lambda_k - \lambda^*) = \overbrace{-A(u_k - x^*)}^{\to 0}$$

et $\lambda_k \to \lambda^*$