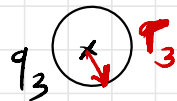
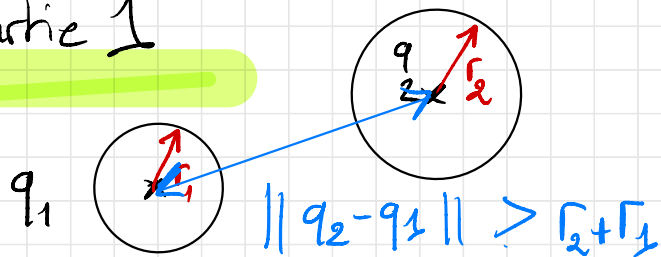


TD5

Partie 1



$Q = \{ \text{positions des centres } (q_i) \in (\mathbb{R}^n)^n \text{ avec} \\ \text{non chevauchement des disques} \}$

$(\forall i, j) \quad \|q_i - q_j\| > r_i + r_j$

$$D_{ij}(q) = \|q_i - q_j\| - (r_i + r_j)$$

1) D_{ij} convexe sur $\mathbb{R}^{2n}$
 ($x \mapsto \|x\|$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$)

2) $D_{ij} \subset^1$ sur ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ $D_{ij} \subset^1$ sur Q ouvert
 ($x \mapsto \|x\| \subset^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$)

$\nabla D_{ij}(q)$ sur Q ?

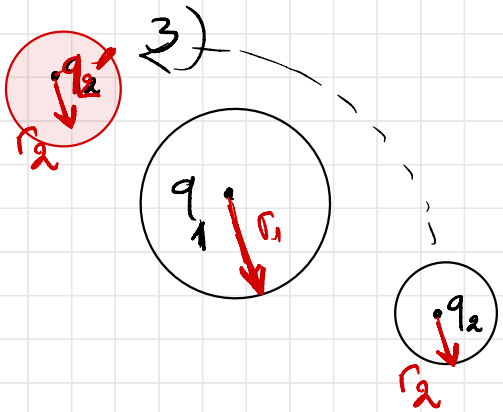
$$\nabla_q D_{ij}(q_1, \dots, q_n) = \begin{pmatrix} \frac{(q_i - q_j)}{\|q_i - q_j\|} \\ \frac{(q_j - q_i)}{\|q_j - q_i\|} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$$

$i \rightarrow \frac{(q_i - q_j)}{\|q_i - q_j\|}$

$j \rightarrow \frac{(q_j - q_i)}{\|q_j - q_i\|}$

En effet: avec
 $x \mapsto \|x\|$, si $x \neq 0$

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \|x+h\| - \|x\| = \sqrt{\|x+h\|^2} - \sqrt{\|x\|^2} \\ &= \frac{1}{2} (\|h\|^2 + 2\langle x, h \rangle) \end{aligned}$$



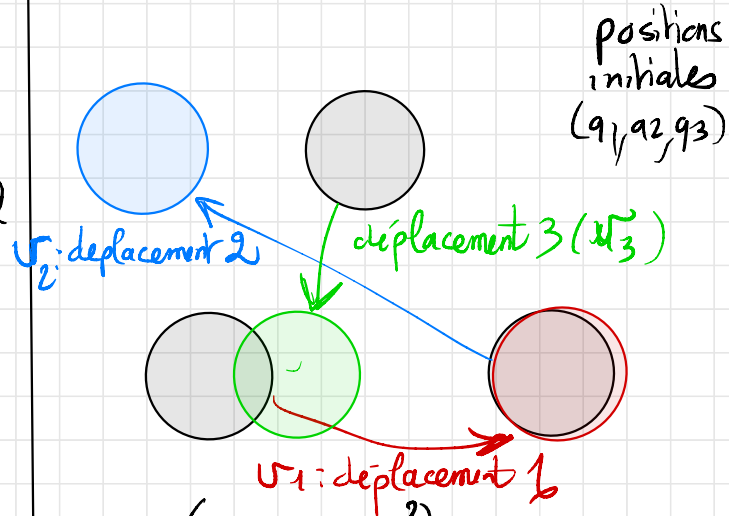
$$\left. \begin{array}{l} (q_1, q_2) \in Q \\ (q_1, q_2') \in Q \end{array} \right\} \text{ mais } (q_1, \frac{q_2 + q_2'}{2}) \notin Q$$

$\Rightarrow Q$ n'est pas convexe

PARTIE 2

L'idée générale consiste à rechercher une direction de lancement des boules de telle sorte qu'elles ne se chevauchent jamais

et qu'elle arrivent à une position 2 aussi proche que possible que de la position finale souhaitée



$$\min_u (\|u - v\|^2) \text{ où}$$

$$u \in \{u \in (\mathbb{R}^2)^n \mid q, D_{i,j} + \langle G_{i,j}(q), u \rangle \leq 0, (q+C \subseteq Q \text{ et } C \text{ convexe fermé})\}$$

2) D_{ij} est strictement convexe sur $\mathbb{R}^{2n}$, d'où

$$\underbrace{D_{ij}(q+u)} > D_{ij}(q) + \langle \nabla D_{ij}(q), u \rangle \geq 0$$

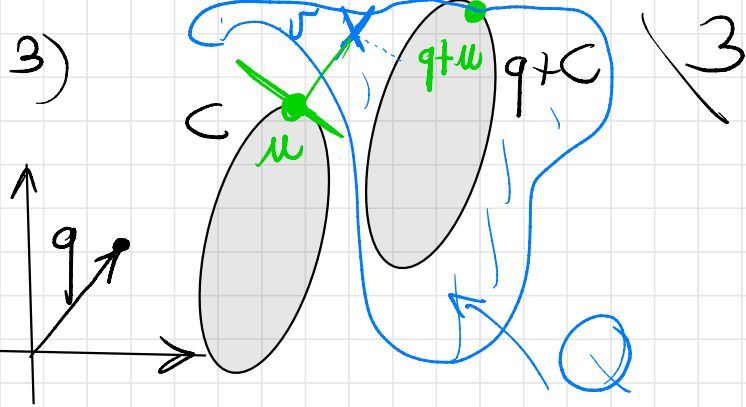
$\Rightarrow D_{ij}(q+u) > 0$ soit exactement
 $q+u \in Q$.

1) C est convexe : $\lambda \in [0, 1]$, $u_1, u_2 \in C$:
 on a bien

$$D_{ij}(q) + \langle \nabla D_{ij}(q), \lambda u_1 + (1-\lambda) u_2 \rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow \lambda u_1 + (1-\lambda) u_2 \in C.$$

C est fermé car intersection (V_{ij}) et inégalité
 large //.



u est la projection orthogonale de v
 sur C et $q+u \in Q$ est la solution
 "la plus proche" de $q+v$ qui soit dans Q

4) Il a $\frac{n(n-1)}{2}$ contraintes inégalité :

$$\mathcal{L}(u, \mu_{ij}) = \|v - u\|^2$$

$$- \sum_{i \neq j} \mu_{ij} (D_{ij}(q) + \langle G_{ij}(q), u \rangle)$$

Formellement, Uzawa consiste à effectuer successivement :

→ une itération de descente en u

→ une itération ^(gradient) de remontée en μ
(gradient projeté)

$$\nabla_u L(u, \mu_{ij}) = 2(u - v) - \sum_{i,j} \mu_{ij} G_{ij}(q)$$

$$\nabla_{\mu_{ij}} L(u, \mu_{ij}) = D_{ij}(q) + \langle G_{ij}(q), u \rangle$$

5) Cet algorithme converge (par des pas ^{petits}) :
on se situe dans le cadre de la minimisation

d'une fonctionnelle quadratique et des contraintes inégalités affines (cf TD4)