Examen 11 Janvier 2018.

Durée : 2H00

Toute réponse doit être justifiée.

Une importance particulière sera accordée à la concision ainsi qu'à la propreté de la copie.

Aucun document n'est autorisé.

L'utilisation des calculatrices, téléphones, smartphones, tablettes et ordinateurs n'est pas autorisée.

Exercice 1 - On cherche à minimiser la fonction J suivante :

$$J(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2xy + z^2 - x + y - z$$

sous la condition :

$$2x - 3y + z = 0$$

1. Montrer que ce problème possède une unique solution.
2. On veut utiliser l'algorithme d'Uzawa pour approcher la solution. Décrire précisément le principe de l'algorithme basé sur l'utilisation de la fonction :

$$\mathcal{L}(x, y, z, \mu) = x^2 + y^2 + 2xy + z^2 - x + y - z + \mu(2x - 3y + z)$$

3. On applique l'algorithme d'Uzawa à partir du point $X_0 = (1, 1, 0, 1)$ et un pas de gradient égal à 0.1. Que vaut le point X_1 après la première itération de l'algorithme ?

Exercice 2 -

On cherche à comparer la façon dont intervient la fonction J qu'on cherche à minimiser, dans les quatre algorithmes suivants : recuit simulé, algorithme génétique, stratégie d'évolution et PSO.

1. Dans le recuit simulé, l'algorithme est-il modifié si la fonction J est remplacée par la fonction $4J$, respectivement $J + 3$? Que se passe-t-il dans le cas d'un algorithme PSO ? Justifier la réponse.
2. Dans un algorithme génétique, est-il possible de garder à la génération suivante le plus mauvais individu ? Que se passe-t-il dans le cas d'une stratégie d'évolution ?
3. La sélection par le rang dans un algorithme génétique a été souvent écrite ainsi :

```
//  
function Asel=selection(A)  
[Npop,L]=size(A)  
L=L-1;  
[s,p]=gsort(A(:,L+1));  
A=A(p,:);  
Asel=[];  
p=(1:Npop)/sum(1:Npop);ps=cumsum(p);  
for i=1:Npop  
    u=rand();isel=1;  
    while (u>ps(isel))  
        isel=isel+1;  
    end  
    Asel=[Asel;A(isel,:)];  
end  
endfunction
```

Où intervient la fonction J dans cette écriture et quel est le rôle dans cette fonction de la ligne $A=A(p, :)$; ?

Exercice 3 - Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $n \geq 2$, des réels vérifiant $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$. On considère le problème d'optimisation suivant appelé ($\mathcal{P}$) :

$$\begin{aligned} \text{Minimiser} \quad & -\sum_{k=1}^n \log(\alpha_k + x_k), \\ \text{sous les contraintes} \quad & x_i \geq 0 \text{ pour tout } i \leq n, \\ & \text{et } \sum_{i=1}^n x_i = 1. \end{aligned}$$

1. Le problème ($\mathcal{P}$) est-t-il convexe ?
2. Montrer que ($\mathcal{P}$) admet au moins une solution.
3. Montrer que cette solution est unique.
On notera dans la suite $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ la solution de ce problème.
4. Justifier pourquoi il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tous positifs et un réel $\beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$-\frac{1}{x_i^* + \alpha_i} - \lambda_i + \beta = 0, \quad \lambda_i x_i^* = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n.$$

En déduire que $\beta > 0$.
On posera dans la suite

$$\theta = \frac{1}{\beta} > 0.$$

5. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$.
(a) Montrer que $x_i^*(x_i^* + \alpha_i - \theta) = 0$ et que

$$\theta \leq x_i^* + \alpha_i.$$

- (b) Montrer que si $\theta \leq \alpha_i$ alors $x_i^* = 0$.
- (c) Montrer que si $\theta > \alpha_i$ alors $x_i^* = \theta - \alpha_i$.

6. En déduire que

$$\sum_{i=1}^n \max(0, \theta - \alpha_i) = 1.$$

7. On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$

$$F(t) = \sum_{i=1}^n \max(0, t - \alpha_i).$$

Montrer F est continue et croissante sur $[0, +\infty[$ et calculer $F(\alpha_k)$ pour $1 \leq k \leq n$.

8. On suppose que $F(\alpha_n) < 1$. Donner l'expression de θ et de celle de la solution $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ en fonction de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.
9. Même question si $F(\alpha_k) < 1 \leq F(\alpha_{k+1})$ pour un certain $k \leq n - 1$.