Contrôle de connaissances. Octobre 2017.

Durée : 1H30

Toute réponse doit être justifiée.

Une importance particulière sera accordée à la concision ainsi qu'à la propreté de la copie.

Exercice 1 - Indiquer si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse (en général), en justifiant votre réponse (démontrer l'assertion ou donner un contre-exemple) :

1. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est affine et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe alors $g \circ f$ est convexe ($n \in \mathbb{N}^*$).
2. Si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont convexes alors $\max(f, g)$ est convexe ($n \in \mathbb{N}^*$).
3. Si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont convexes alors $\min(f, g)$ est convexe ($n \in \mathbb{N}^*$).
4. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe, alors $|g|$ est convexe.
5. Si $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, convexe et bornée alors f est décroissante.

Rappel : on rappelle que $\max(f, g)(x) = \max(f(x), g(x))$ et $\min(f, g)(x) = \min(f(x), g(x))$.

Exercice 2 - Soit $\alpha > 0$ un réel. On considère le problème d'optimisation

$$(\mathscr{P}) \begin{cases} \text{Minimiser } x^2 + y^2, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ x^2 - 2x + 4\alpha^2 y^2 - 16\alpha y + 13 \leq 0. \end{cases}$$

1. S'agit-t-il d'un problème convexe ?
2. Montrer que l'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x + 4\alpha^2 y^2 - 16\alpha y + 13 \leq 0\}$ est un fermé borné.
3. En déduire que le problème $(\mathscr{P})$ admet au moins une solution (sans calculs !).
4. Montrer de **deux manières différentes** que cette solution est unique (sans la trouver).
5. Justifier pourquoi la solution doit réaliser les conditions d'optimalité KKT et écrire ces conditions.
6. On suppose $\alpha = \frac{1}{2}$. Trouver la solution.

Exercice 3 - Soit $n \geq 1$ un entier. On considère la fonction

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i,$$

définie sur $D = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n ; \ x_1 > 0, \ x_2 > 0, \ ..., \ x_n > 0\}$ et le problème

$$(P) \begin{cases} \text{Minimiser } f(x_1, ..., x_n), \ (x_1, ..., x_n) \in D, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \end{cases}$$

1. L'ensemble D est-il convexe ? est-il ouvert ?
2. La fonction f est-elle convexe sur D ? Est-elle strictement convexe ?
3. Le problème (P) est-il convexe ?
4. Trouver toutes les solutions de (P).
5. Soit $(x_1, ..., x_n) \in D$ et posons
$$\underline{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$
Montrer que
$$\frac{x_1 \log x_1 + \cdots + x_n \log x_n}{n} \geq \underline{x} \log \underline{x}.$$