TD 3 Optimisation: algorithme d'Uzawa

Exercice 1

On considère une canette en aluminium de forme cylindrique de hauteur $h \in [2, 12]$ et de diamètre $d \in [2, 12]$ (en centimètres). On souhaite que cette canette ait une surface minimale (hors partie supérieure) pour une contenance minimale de 300 ml.

1. Montrer que le problème possède une unique solution qu'on déterminera
2. Déterminer les valeurs des multiplicateurs de Lagrange associés à cette solution.
3. Implémenter sous Scilab l'algorithme d'Uzawa permettant d'approcher numériquement la solution.

Exercice 2

Soit A une matrice symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. On définit la fonctionnelle quadratique J pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par:

$$J(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$$

Soit $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $m < n$ une matrice de rang m. On note

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad Cx = 0\}$$

1. Montrer que J possède un unique minimum x^* sur F.
2. Ecrire (et implémenter avec Scilab) l'algorithme d'Uzawa pour ce problème.

Exercice 3

On considère une configuation dans le plan de n disques repérés par leurs centres $(q_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{R}^2)^n$ et leurs rayons $(r_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. On définit le domaine correspondant de non-intersection de ces disques:

$$Q = \{q = (q_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{R}^2)^n \quad / \quad \|q_i - q_j\| > r_i + r_j, \quad 1 \leq i < j \leq n\}$$

et on définit la fonction suivante sur $(\mathbb{R}^2)^n$:

$$D_{i,j}(q_1, ..., q_n) = \|q_i - q_j\| - (r_i + r_j)$$

1. Montrer que D est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^{2n}$. Montrer que $D_{i,j}$ est C^1 sur Q et calculer son gradient, noté $G_{i,j}$.

2. L'ensemble Q est-il convexe?

3. A présent, on souhaite que les disques se déplacent de la position $(q_i)_{1\leq i\leq n}$ à la position $(q_i + v_i)_{1\leq i\leq n}$ suivant une trajectoire rectiligne uniforme. Cependant, en raison de possibles intersections à l'arrivée du déplacement, on cherche à trouver le déplacement admissible le plus proche du déplacement souhaité $v = (v_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{R}^2)^n$.

   On étudie donc le problème d'optimisation suivant:

   $$\text{Trouver}\, u^* = argmin\,(J(u) = \|u - v\|^2) \qquad (Opt)$$

   sur l'ensemble

   $$C = \{u \in (\mathbb{R}^2)^n \quad / D_{i,j}(q) + < G_{i,j}(q), u > \geq 0, \quad 1 \leq i < j \leq n\}$$

   (a) Montrer que C est un ensemble fermé et convexe.

   (b) Montrer que si $q \in Q$ et $u \in C$, alors $q + u \in Q$.

   (c) Exprimer le problème (Opt) précédent en termes de projection et en déduire qu'il possède une unique solution.

   (d) Ecrire le Lagrangien du problème (Opt) puis exprimer sous forme pseudo-informatique l'algorithme d'Uzawa dans ce cas.

   (e) Déterminer une valeur $\rho_C > 0$ telle que pour tout $\rho \in]0, \rho_C[$, l'algorithme d'Uzawa converge vers la solution du problème (Opt).

   (f) Implémenter sous Scilab l'algorithme correspondant et le tester pour la configuration consistant en 3 disques de rayon identique égal à $\frac{1}{5}$ avec:

   $$q = \{(0,0), (1,0), (\frac{1}{2}, 1)\}, \quad \text{et} \quad u = \{(1,0), (-\frac{1}{2}, 1), (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})\}$$