

CC1: optimisation

Exercice 1

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$u(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$

On note

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x + y \geq 1\}$$

1. Montrer que u est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle possède un unique minimum sur D .
2. En écrivant les relations de KKT, déterminer le point où u atteint son minimum sur D .

Exercice 2

Soit J une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que J est C^1 , strictement convexe. On suppose qu'il existe $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\nabla J(x^*) = 0$$

1. Montrer que x^* est un minimum global de la fonction J et qu'il est unique (on justifiera ces deux assertions).
2. On considère la méthode de descente $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à pas optimal, c'est à dire telle que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque et

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla J(x_k)$$

avec α_k étant choisi tel que

$$q(\alpha_k) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*} q(\alpha) \quad (1)$$

avec

$$q(\alpha) = J(x_k - \alpha \nabla J(x_k))$$

Montrer que α_k est correctement défini avec la relation (1) et qu'on a bien $J(x_{k+1}) < J(x_k)$ si $x_k \neq x^*$.

3. Calculer $q'(\alpha)$. En déduire que $\langle \nabla J(x_{k+1}), \nabla J(x_k) \rangle = 0$

Exercice 3

On considère le script Scilab de minimisation sans contrainte suivant qu'on applique à une fonction nommée `f` de gradient `gradf` :

```
alphainit=0.5
a=0.001;b=0.9;
lambda=1.5;
//
X0=[0;0];
X=X0;
for i=1:Niter
    d=-gradf(X)
    alpha=alphainit;qpr=d'*gradf(X);
    tg=0;td=0;
    while (f(X+alpha*d)>f(X)+a*alpha*qpr) | (alpha*(d'*gradf(X+alpha*d))<b*qpr)
        if f(X+alpha*d)>f(X)+a*alpha*(qpr) then
            td=alpha;
        else
            tg=alpha;
        end
        if td==0 then
            alpha=lambda*alpha
        else
            alpha=(tg+td)/2
        end
    end
    X=X+alpha*d;
end
disp('valeur obtenue:');disp(X)
```

où le caractère `|` désigne l'opérateur 'ou'. On admet que l'instruction `while` ne bouclera jamais indéfiniment.

1. Que calcule l'instruction `qpr=d'*gradf(X)` ?
2. Rappeler la condition d'Armijo. Est-elle toujours vérifiée ici ?
3. Sur l'exemple de la fonction de Rosenbrock :

$$f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (x - 1)^2$$

donner le résultat de l'algorithme au bout de une itération (`Niter=1`).