

TD 2 Optimisation: introduction et rappels (partie 2)

Exercice 1.

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \sin(\|x\|^2) = \sin\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$$

1. Montrer que la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer son gradient.
2. Montrer que la fonction f est C^2 et calculer sa matrice Hessienne.
3. Déterminer tous les extrema (minima et maxima) de f sur $\mathbb{R}^n$. Représenter graphiquement ces extrema dans le cas où $n = 2$.

Exercice 2.

On considère la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par la relation :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$

1. Montrer que la fonction g est coercive.
2. Montrer que la fonction g est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.
3. En déduire que g possède un unique minimum sur $\mathbb{R}^2$ et le déterminer.
4. Déterminer le minimum de g sur $X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 3\}$.
5. Soit l'ensemble $X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4 \text{ et } x + y \geq 2\}$. Montrer que X_2 est convexe et compact. Déterminer le minimum et le maximum de g sur X_2 .