Université de Versailles

http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MINT-optim.html

Année 2018-2019

semestre 1

TD 6: révisions

Exercice 1.

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$u(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2,$$

où a et b sont deux réels On note

$$H = \{(x,y) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R},\ y^2 - x^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 2\}$$

1. Montrer que u est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle possède un unique minimum sur H.
2. En écrivant les relations de KKT, déterminer le point où u atteint son minimum sur H.

Exercice 2.

Soit A une matrice symétrique définie positive, On cherche à minimiser une fonctionnelle quadratique $J : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que

$$J(X) = \frac{1}{2} < AX, X > - < b, X >$$

sous la contrainte $< c, X >= 0$ avec b et c deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Pour cela, on s'intéresse au script Scilab suivant :

```
n=3;
A=[3,2,0;2,2,0;0,0,2]
b=[1;-1;1]
m=1;
C=[2,-3,1]
//
// solution exacte
//
M=[A,C';C,zeros(m,m)];bb=[b;zeros(m,1)];
X=inv(M)*bb;
Xex=X(1:n);
//
disp('solution exacte');disp(Xex);
//
// solution approch'ee
//
Niter=100;rho=0.1;alpha=0.1;
//
X=[0;1;1]
mu=1;
```

```
//
for i=1:Niter
  X=X-rho*(A*X-b+C'*mu);
  mu=mu+alpha*C*X;
end
disp('solution approch\'ee);disp(X)
```

1. Montrer que la fonction J possède un unique minimum et que celui-ci est global.
2. Calculer la solution exacte `Xex` du problème en question dans le script.
3. Quel algorithme approché est utilisé dans la deuxième partie du script ?
4. Expliquer la ligne `X=X-rho*(A*X-b+C'*mu)`.

Exercice 3.

La méthode du classement stochastique décrite ci-dessous permet de classer λ individius dans un problème d'optimisation avec contrainte.

```
I_j = j ∀ j ∈ {1, ..., λ}
for i = 1 to λ do
    for j = 1 to λ − 1 do
        sample u ∈ U(0, 1) (uniform random number generator)
        if (φ(x_{I_j}) = φ(x_{I_{j+1}}) = 0) or (u < P_f) then
          if f(x_{I_j}) > f(x_{I_{j+1}}) then
            swap(I_j, I_{j+1})
          fi
        else
          if φ(x_{I_j}) > φ(x_{I_{j+1}}) then
            swap(I_j, I_{j+1})
          fi
        fi
    od
    if no swap done break fi
od
```

Fig. 2. Stochastic ranking procedure, $P_f = 0.45$.

Dans cet algorithme, f est la fonction coût à minimiser et Φ la pénalisation et P_f est un paramètre.

1. Que se passe t-il quand $P_f = 0$, respectivement 1 ?
2. Ecrire une fonction Scilab de classement alétaoire de λ individus pour une fonction f et une pénalisation Φ données.

Exercice 4.

Donner deux différences et deux similitudes entre une stratégie d'évolution et un algorithme génétique.