Examen: optimisation, session 1

Exercice 1

Soit $(p_1, ..., p_k)$ une suite de k points de $\mathbb{R}^2$ avec $k \geq 2$. On pose $p_j = (\alpha_j, \beta_j)$ et on suppose que la suite (α_j) est strictement croissante. On considère alors la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \sum_{j=1}^{k} (\beta_j - x\alpha_j - y)^2$$

1. Montrer que f est strictement convexe et coercive.
2. En déduire qu'il existe un unique (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$ tel que

$$f(x_0, y_0) = \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y)$$

3. Calculer (x_0, y_0).

Exercice 2

On considère f une fonction C^1 et coercive de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On note g la fonction gradient de f définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que g est Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$ de coefficient de Lipschitz L.

On construit une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à partir de la donnée de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque et de la relation :

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k$$

où d_k désigne une direction de descente (c'està dire telle que le produit scalaire $(d_k, g(x_k)) < 0$) et t_k le pas dans cette direction supposé satisfaire la conditions suivante :

$$q(t_k) \leq q(0) + m_1 t_k q'(0) \quad \text{et} \quad q'(t_k) \geq m_2 q'(0)$$

où on a noté $q(t) = f(x_k + td_k)$ et où m_1 et m_2 sont deux réels tels que $0 < m_1 < m_2 < 1$.

1. Donner un exemple graphique des valeurs de t_k admissibles en représentant un exemple de fonction q.
2. On cherche à montrer que la méthode de descente ainsi construite est convergente vers un point critique de f lorsque $d_k = -g(x_k) = -g_k$ (direction du gradient).
   (a) Montrer que que $q'(0) = -||g_k||^2$ dans ce cas.
   (b) Montrer que $m_1||g_k|| \cdot ||x_{k+1} - x_k|| \leq f(x_k) - f(x_{k+1})$.
   (c) Montrer que $(1 - m_2)||g_k||^2 \leq (g_k - g_{k+1}, g_k)$ puis $(1 - m_2)||g_k|| \leq L||x_{k+1} - x_k||$.
   (d) En composant et en sommant ces relations, montrer que $\lim_{k\to+\infty} g_k = 0$.

Exercice 3

On considère le programme Scilab suivant :

```
n=10; lambda=50; mu=5; Ngen=200; sigma=0.01;
function y=sphere(x)
    y=sum(x.*x);
endfunction
Ap=2*rand(mu,n+1)-ones(mu,n+1)
Ae=zeros(lambda,n+1)
BestJ=[]; BestX=[]
for i=1:Ngen
  X=1/mu*sum(Ap(:,1:n),'r')
  val=sphere(X);ps=0
  for i=1:lambda
     Ae(i,1:n)=X+sigma*rand(1,n,'normal')
     Ae(i,n+1)=sphere(Ae(i,1:n))
     if (Ae(i,n+1)<val)then ps=ps+1;end
  end
  ps=ps/lambda;
  sigma=sigma*exp(1/3*(ps-1/5)/(1-1/5));
  [a,b]=gsort(-Ae(:,n+1))
  Ae=Ae(b,:)
  Ap=Ae(1:mu,:)  // selection
  BestJ=[BestJ,Ae(1,n+1)]
  BestX=[BestX;Ae(1,1:n)]
end
figure(1);clf()
plot(1:Ngen,BestJ)
figure(2); clf()
for j=1:n
 plot2d(1:Ngen,BestX(:,j),j)
end
```

1. Décrire l'objectif de ce script ainsi que l'algorithme utilisé.
2. Récrire sous forme d'une boucle la ligne `X=1/mu*sum(Ap(:,1:n),'r')`
3. Expliquer le fonctionnement et l'intérêt de la ligne `sigma=sigma*exp(1/3*(ps-1/5)/(1-1/5))`
4. Indiquer ce que tracent les deux figures en sortie et en représenter un exemple.