Examen: optimisation, session 2

Exercice 1

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$u(x,y) = x^2 + y^2 + xy$$

On note

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x + y \geq 1\}$$

1. Montrer que u est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle possède un unique minimum sur D.
2. En écrivant les relations de KKT, déterminer le point où u atteint son minimum sur D.
3. Expliquer le principe de l'algorithme d'Uzawa permettant d'approcher le minimum de u sur D.

Exercice 2

On considère la fonction g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad g(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$$

où $b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive.

1. Montrer que g est coercive.
2. Montrer que g possède un unique minimum global noté x^*.
3. On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ telle que $u_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque et

   $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1} = u_k - \alpha \nabla g(u_k)$$

   où α est un réel positif fixé. Montrer que

   $$u_{k+1} - x^* = (I_3 - \alpha A)(u_k - x^*)$$

   où I_n désigne la matrice identité de taille n.
4. On note L la plus grande valeur propre de A. Montrer que si $\alpha \in]0, \frac{2}{L}[$, alors la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente vers x^*.

Exercice 3

On considère la fonction Scilab suivante :

```
function B=f(A)
       [N,n1]=size(A);
       B=A;
       for i=1:N/2
        u=1+floor(rand()*N);
        v=1+floor(rand()*N);
        r=rand()
        if (rand()<pc)
         B(2*i-1,:)=r*A(u,:)+(1-r)*A(v,:)
         B(2*i,:)=(1-r)*A(u,:)+r*A(v,:)
        end
      end
endfunction
//
```

1. Décrire l'objectif de cette fonction et dans quel cadre elle est utilisée.
2. Quelle valeur renvoie cette fonction si pc a pour valeur 0 ?
3. Expliquer le principe de la ligne : `B(2*i-1,:)=r*A(u,:)+(1-r)*A(v,:)`
4. On prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $pc = 1$. Donner trois valeurs possibles que peut retourner $f(A)$.