CC1 Optimisation numérique

Exercice 1

On considère la fonction

$$f(x, y) = x + y$$

sur l'ensemble

$$\Omega = \{ \ y \leq 0, \ y \geq x^3 \}$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble Ω.
2. Rechercher graphiquement le maximum de f sur Ω.
3. Le point obtenu satisfait-il les relations KKT ? Expliquer.

Exercice 2

On considère la fonction suivante sur $\mathbb{R}^2$:

$$J(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (x - 1)^2$$

Calculer la direction associée respectivement à la méthode du gradient et à la méthode de Newton au point $X_0 = (-1, 1)$. S'agit-il dans les deux cas de directions de descente ?

Exercice 3

On considère f une fonction C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ coercive et strictement convexe. On note g la fonction gradient de f définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que g est Lipschitzienne sur tout ensemble $S_{x_0} = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq f(x_0)\}$.

1. Montrer que f possède un unique minimum global x^* pour lequel $g(x^*) = 0$.

2. On cherche à construire une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x^* On suppose qu'il est possible de définir correctement celle-ci à partir de la donnée de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque et de la relation :

$$x_{k+1} = x_k + t_k g_k$$

où $g_k = -g(x_k)$ et t_k le pas dans cette direction supposé satisfaire la conditions suivante :

$$q(t_k) \leq q(0) + m_1 t_k q'(0) \quad \text{et} \quad q'(t_k) \geq m_2 q'(0)$$

où on a noté $q(t) = f(x_k + tg_k)$ et où m_1 et m_2 sont deux réels tels que $0 < m_1 < m_2 < 1$.

Donner un exemple graphique des valeurs de t_k admissibles dans le cas d'une fonction à une variable tracée 'à la main'.

3. On cherche à montrer que la méthode de descente ainsi construite est convergente vers x^*.

3.1 Exprimer $q'(0)$ en fonction de g_k.

3.2 Montrer que $m_1||g_k|| \cdot ||x_{k+1} - x_k|| \leq f(x_k) - f(x_{k+1})$.

3.3 Montrer que $(1 - m_2)||g_k|| \leq L||x_{k+1} - x_k||$ où L désigne la constante de Lipschitz de g dans S_{x_0}.

3.4 En déduire que $\lim\limits_{k\to+\infty} g_k = 0$ puis conclure.