TD 1 Optimisation: introduction et rappels

Exercice 1 . On considère la fonction sur $\mathbb{R}^n$:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x + b$$

où $Q \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$. Calculer $\nabla f(x)$ et $Hfx)$.

Exercice 2. On considère la fonction sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

Calculer le modèle quadratique approché de f en $(1, 1)$.

Exercice 3. Résoudre le problème de la canette :

$$\min_{r,h}(2\pi r^2 + 2\pi rh) \quad \text{sous} \quad \pi r^2 h - v_0 = 0$$

Exercice 4

1. Représenter graphiquement quelques lignes de niveau de la fonction

   $$f(x, y) = 2(x - 1)^2 + y^2 + 1$$

   puis représenter pour un point sur une des lignes de niveau, le gradient en ce point et un exemple de direction de descente.
2. Soit f une fonction différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $d \in \mathbb{R}^n$ est tel que

   $$||\nabla f(x) + d|| \leq ||\nabla f(x)||$$

   Montrer que d est une direction de descente de f en x.
3. Soit f une fonction différentiable et <u>convexe</u> de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Soient x et y dans $\mathbb{R}^n$ tels que $f(y) < f(x)$. Montrer que $y - x$ est une direction de descente de f en x.