Université de Versailles Année 2021-2022
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MINT-optim.html` semestre 1

CC1: optimisation

Exercice 1

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et le vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ définis par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la fonctionnelle J telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad J(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$$

possède un unique minimum (sans le calculer) sur l'ensemble

$$V = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 + x_3 \geq 2\}$$

2. En écrivant les conditions KKT, déterminer ce minimum.

Exercice 2

1. Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ strictement convexe et ne possédant pas de point critique.
2. Tracer quelques lignes de niveau de la fonction $f(x, y) = x^2 y$
3. Soit $\beta \in]0, 1[$ et f une fonction C^1 et minorée. Montrer que si d est une direction de descente pour f en x, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$f(x + \alpha d) = f(x) + \beta\alpha < d, \nabla f(x) >$$

On pourra commencer par une conjecture graphique.

Exercice 3

On considère une fonction f C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\lim_{||x|| \to +\infty} f(x) = +\infty$. On note g la fonction gradient de f définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que g est Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$ de rapport L.

On cherche à construire une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ du type

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

où d_k désigne une direction de descente (c'est à dire telle que $(d_k, g(x_k)) < 0$) et α_k le pas dans cette direction supposé satisfaire la conditions suivante:

$$q(\alpha_k) \leq q(0) + m_1 \alpha_k q'(0) \quad \text{et} \quad q'(\alpha_k) \geq m_2 q'(0)$$

où on a noté $q(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k)$ et où m_1 et m_2 sont deux réels tels que $0 < m_1 < m_2 < 1$.

On parle de la stratégie de recherche linéaire de Wolfe (vue en TD).

On veut montrer ici que la méthode ainsi construite satisfait la condition Z. On rappelle que la condition Z est vérifié pour un pas de descente si on a:

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - C||g(x_k)||^2 \cos^2(\theta_k)$$

pour une constante $C > 0$ donnée indépendante de k et où

$$\cos(\theta_k) = \frac{- < d_k, g(x_k) >}{||g(x_k)||.||d_k||}$$

1. Montrer que
$$(1 - m_2)\,| < g(x_k), d_k > | \leq < g(x_{k+1}) - g(x_k), d_k >$$

2. En déduire que
$$(1 - m_2)||g(x_k)|| \cos(\theta_k) \leq L\alpha_k ||d_k||$$

3. Montrer que
$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - m_1 \alpha_k ||g(x_k)||.||d_k|| \cos(\theta_k)$$

4. Conclure et déterminer la valeur de C en fonction de L, m_1 et m_2.