CC3: optimisation

Exercice 1

On cherche à minimiser la fonction J suivante:

$$J(x,y) = x^2 + 3y^2 + 2xy + x + y$$

sous la condition:

$$2x - 3y \leq 0$$

1. Montrer que ce problème possède une unique solution (sans la calculer).
2. On veut utiliser l'algorithme d'Uzawa pour approcher la solution. Décrire précisément le principe de l'algorithme basé sur l'utilisation de la fonction:

$$\mathcal{L}(x,y,\mu) = x^2 + 3y^2 + 2xy + x + y + \mu(2x - 3y)$$

3. On applique l'algorithme d'Uzawa à partir du point $(X_0, \mu_0) = (3,1,1)$ et un pas de gradient égal à 0.1. Que vaut le point (X_1, μ_1) après la première itération de l'algorithme?

Exercice 2

Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe et coercive et soit l'ensemble

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \phi(x) \leq 0\}$$

où ϕ est une fonction strictement convexe.

On note

$$\mathrm{Int}(C) = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \phi(x) < 0\}$$

l'intérieur de C. On suppose dans toute la suite que C est fermé et que $\mathrm{Int}(C) \neq \emptyset$.

1. Montrer que J possède un unique minimum X^* sur C
2. Soit $\epsilon > 0$. On note J_ϵ la fonction définie sur $\mathrm{Int}(C)$ par:

$$J_\epsilon(x) = J(x) - \frac{\epsilon}{\phi(x)}$$

   Montrer que J_ϵ possède un unique minimum X_ϵ sur $\mathrm{Int}(C)$.

3. Montrer (quitte à extraire) que X_ϵ converge vers X^* quand ϵ tend vers 0.
4. Expliquer pourquoi on parle de méthode de pénalisation intérieure.

Exercice 3

1. Expliquer le principe de chaque terme dans la probabilité d'accepter le point y à partir du point x dans le cas d'un recuit simulé:

$$p = \exp(-\frac{f(y) - f(x)}{T_n})$$

2. Expliquer les principes d'exploitation et d'exploration dans la formule de réactualisation des vitesses dans un algorithme PSO (les notations sont celles du TP effectué):

$$v_i \mapsto wv_i + c_1\phi_1 \otimes (p_i - x_i) + c_2\phi_2 \otimes (p_g - x_i)$$

   Dans cette formule, que se passe t-il pour l'algorithme si on prend respectivement $w = 0$, ou $c_2 = 0$?

Exercice 4

Dans une stratégie d'évolution pour minimiser une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$, on choisit d'utiliser la mutation gaussienne $y = x + h$ où la densité de la variable alétoire $h \in \mathbb{R}^n$ est donnée par:

$$p(h) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \det(C)^{\frac{1}{2}}} \exp(-\frac{1}{2}{}^t hC^{-1}h)$$

1. Calculer la moyenne de la variable aléatoire h. Dans le cas isotrope ($C = \alpha I_n$) et avec $n = 1$ que vaut la variance de la variable aléatoire h?

2. Représenter approximativement (à l'ordre 2) les lignes de niveaux d'une fonction f supposée C^2 près d'un minimum noté x^* (on pourra prendre un exemple en dimension 2).

3. De manière générale, quel est le meilleur choix pour la matrice C par rapport à $Hf(x)$ (Hessien de f en x) si x se trouve proche de x^*? Expliquer votre réponse sur le graphique précédent.