

## TD 2 Optimisation: introduction et rappels (partie 2)

### Exercice 1.

On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  définie par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \sin(\|x\|^2) = \sin\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$$

1. Montrer que la fonction  $f$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^n$  et calculer son gradient.
2. Montrer que la fonction  $f$  est  $C^2$  et calculer sa matrice Hessienne.
3. Déterminer tous les extrema (minima et maxima) de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Représenter graphiquement ces extrema dans le cas où  $n = 2$ .

### Exercice 2.

On considère la fonction  $g$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par la relation :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$

1. Montrer que la fonction  $g$  est coercive.
2. Montrer que la fonction  $g$  est strictement convexe sur  $\mathbb{R}^2$ .
3. En déduire que  $g$  possède un unique minimum sur  $\mathbb{R}^2$  et le déterminer.
4. Déterminer le minimum de  $g$  sur  $X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 3\}$ .
5. Soit l'ensemble  $X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4 \text{ et } x + y \geq 2\}$ . Montrer que  $X_2$  est convexe et compact. Déterminer le minimum et le maximum de  $g$  sur  $X_2$ .

### Exercice 3

Soit la fonction.

$$J(x, y) = x^4 + y^2 + 2xy$$

à minimiser sur l'ensemble

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \leq 1 \text{ et } x + y \leq 1\}$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble  $D$ .
2. Montrer que le point  $(0, 0)$  n'est pas un minimum local de  $J$  sur  $D$ .
3. Montrer que  $J$  possède un minimum global sur  $D$ .
4. Ecrire les relations KKT et en déduire l'ensemble des minima locaux de  $J$  sur  $D$ .

#### Exercice 4

On considère la fonction

$$f(x, y) = x + y$$

sur l'ensemble

$$\Omega = \{ y \leq 0, y \geq x^3 \}$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble  $\Omega$ .
2. Rechercher graphiquement le maximum de  $f$  sur  $\Omega$ .
3. Le point obtenu satisfait-il les relations KKT ? Expliquer.