TD 1 : RAPPELS ET COMPLEMENTS SUR LES EVN

Exercice 1.

Soit N fixé dans $\mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^N$.

On définit pour tout $p > 0$, la norme $||.||_p$ de E par la formule :

$$\forall x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N, \quad ||x||_p = (\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

avec la convention $|x|^p = \exp(p \ln(|x|))$ si $x \neq 0$ et 0 sinon.

a) Montrer que pour tout $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$,

$$\lim_{p \to +\infty} ||x||_p = ||x||_\infty$$

où

$$||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

b) Soit $x = (x_1, ..., x_N)$ fixé dans $\mathbb{R}^N$. Montrer que l'application φ définie de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et telle que $\varphi(p) = ||x||_p$ est décroissante.

c) Soit $(p_1, p_2) \in]0, +\infty[^2$ tels que $p_1 < p_2$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\lambda ||x||_{p_1} \leq ||x||_{p_2} \leq ||x||_{p_1}$$

avec

$$\lambda = N^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}}$$

d) Montrer que chaque inégalité précédente possède un cas d'égalité pour un certain $x \in \mathbb{R}^N$ non nul.

Exercice 2.

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme infinie. Pour $f \in E$, on note K l'application telle que

$$\forall x \in E, \quad K(f)(x) = x f(\frac{x}{2})$$

a) Montrer que K est linéaire et continue de E dans E. Calculer sa norme.

b) Déterminer $Ker(K)$ et $Im(K)$.

c) On se place à présent dans $F = L^2([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $||.||_2$. Montrer que K est linéaire et continue de F dans F et calculer sa norme.

Exercice 3.

On considère l'evn $E = l^\infty(\mathbb{R})$ muni de sa norme naturelle. On note C_0, respectivement F, le sev de E des suites convergeant vers 0, respectivement nulles à partir d'un certain rang.

a) Montrer que l'adhérence de F est égale à C_0.

b) Montrer que C_0 est complet. Qu'en est-il de F ?

Exercice 4.

On considère l'evn $E = C_0(\mathbb{N})$ des suites convergeant vers 0 muni de la norme infinie. On fixe $u \in l^1(\mathbb{N})$ et on considère l'application Φ_u de E dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall v \in E, \quad \Phi_u(v) = \sum_{i=1}^{+\infty} u_n v_n$$

a) Montrer que Φ_u est bien définie et appartient à E'.

b) Montrer que $\Phi : u \mapsto \Phi_u$ est une isométrie bijective de l^1 dans E'.

Exercice 5.

On considère l'evn $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme. On note E^+ le sous ensemble de E des fonctions positives. On dit que l'endomorphisme $u \in L(E)$ est positif si $u(E^+) \subset E^+$.

a) Soit $f \in E$. On sait en particulier que f est uniformément continue, c'est à dire :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - t| \leq \delta \implies |f(x) - f(t)| \leq \epsilon$$

Ainsi fixés ϵ et δ, on pose $q(x) = \epsilon + 2||f||(\frac{x}{\delta})^2$ puis $q_t^+(x) = f(t) + q(x-t)$ et $q_t^-(x) = f(t) - q(x-t)$

Montrer que

$$\forall t \in [0,1], \; q_t^+(t) - \epsilon \leq f(t) \leq q_t^-(t) + \epsilon \quad \text{et} \quad q_t^-(t) \leq f(t) \leq q_t^+(t)$$

b) On considère une base B de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit (u_n) une suite d'endomorphismes de $L(E)$ positifs telle que la suite $(u_n(g))$ converge dans E vers g pour tout $g \in B$.

c) Conclure que pour tout $f \in E$, $(u_n(f))$ converge dans E vers f.

Exercice 6.

Compléter la preuve de l'inégalité de Minkowski ébauchée dans le cours.

Exercice 7.

Compléter la preuve du théorème de compacité de la boule unité fermée et de l'équivalence des normes ébuachée dans le cours.