UVSQ, Master Mathématiques Fondamentales — Année 2010/2011
Analyse fonctionnelle 2
`http://www.math.uvsq.fr/~dumas/MSMA721.html`

TD 11 : OPERATEURS DE STURM LIOUVILLE

Exercice 1 (opérateur laplacien)

1. On s'intéresse ici à l'équation différentielle suivante (laplacien sur $[a, b]$ avec conditions de Dirichlet au bord) : trouver $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ tel que

$$\begin{cases} u'' = f \quad x \in]a, b[\\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

1. On suppose que $f \in C([a, b], \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique solution $u \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ de (1) donnée par

$$\forall x \in [a, b], \quad u(x) = \int_a^x \int_a^t f(s)dsdt - \frac{x-a}{b-a} \int_a^b \int_a^b f(s)dsdt$$

2. Soit $f \in C([a, b], \mathbb{R})$. On considère l'opérateur $\tilde{T}$ de $E = C([a, b], \mathbb{R})$ dans $H = L^2([a, b], \mathbb{R})$ tel que

$$\forall x \in [a, b], \quad \tilde{T}(f)(x) = \int_a^x \int_a^t f(s)dsdt - \frac{x-a}{b-a} \int_a^b \int_a^b f(s)dsdt$$

Montrer que $\tilde{T}$ est un opérateur continu de E dans H munis tous deux de la norme associée au produit scalaire usuel sur H :

$$< u, v >= \frac{1}{b-a} \int_a^b u(x)v(x)dx$$

En déduire que $\tilde{T}$ peut se prolonger en un opérateur continu T de H dans H. Montrer que $Im(T)$ est inclus dans $C^1([a, b], \mathbb{R})$.

3.Montrer que si f est un élément de la boule unité de H, alors il existe une constante M indépendante de f telle que

$$||T(f)||^2 + ||T(f)'||^2 \leq M$$

En déduire que T est un opérateur compact de H dans H.

4. Montrer que T est un opérateur autoadjoint sur H. On pourra commencer par prendre f et g dans $C([a, b], \mathbb{R})$.

5. Déterminer une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T.

Exercice 2 (opérateur de Sturm Liouville général)

1. On s'intéresse à l'équation différentielle générale suivante posée sur $[0, 1]$: trouver $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ tel que

$$\begin{cases} -(pu')' + cu = f, \quad x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

où $p \in C^1([0, 1], \mathbb{R}$, $c \in C([0, 1], \mathbb{R})$ et $f \in C([0, 1], \mathbb{R}$ avec de plus $p > 0$ et $c \geq 0$.

On considère l'opérateur T de $E_2^0 = \{v \in C^2([0, 1], \mathbb{R}), v(0) = v(1) = 0\}$ dans $E = C([a, b], \mathbb{R})$ tel que

$$T(v) = -(pv')' + cv$$

Montrer que T est un opérateur autoadjoint pour le produit scalaire usuel sur $L^2([0, 1])$ et tel que

$$\forall v \in E_2^0 \setminus \{0\}, \quad < T(v), v > > 0$$

En déduire que le problème (2) avec $f = 0$ admet comme unique solution la solution nulle.

2. Montrer par une méthode de tir et avec la question précédente, que le problème (2) admet toujours une unique solution.

3. On dit que $u \in E_1^0 = \{v \in C^1([0,1],\mathbb{R}), v(0) = v(1) = 0\}$ est solution faible de (2) si elle vérifie

$$\forall v \in E_1^0, \quad a(u,v) = L(v) \tag{3}$$

où $a(u,v) = \int_0^1 (pu'v' + cuv)dx$ et $L(v) = \int_0^1 fvdx$.

Montrer que $u \in E_2^0$ est solution faible de (2) de si et seulement si elle est solution forte de (2).

4. On cherche ici à exprimer la solution forte de (2) par un opérateur intégral. Soit $y \in]0,1[$. On considère la fonction G_y, appelée fonction de Green telle que :

(i) G_y est C^2 sur $[0,y[\cup]y,1]$ et vérifie l'équation $-(pu')' + cu = 0$ sur $[0,y[\cup]y,1]$.

(ii) $G_y(0) = G_y(1) = 0$.

(iii) G_y est continue en y et $p(y)\left((G_y)'(y^-) - (G_y)'(y^+)\right) = 1$.

On admettra qu'une telle construction définit une unique fonction G_y.

4.a) Construire la fonction de Green lorsque $p = c = 1$.

4.b) Montrer que G_y vérifie :

$$\forall v \in E_1^0, \quad a(G_y, v) = v(y)$$

4.c) On pose $K(x,y) = G_y(x)$ et on considère l'opérateur Θ défini sur $C([0,1],\mathbb{R})$ par

$$\forall x \in [0,1], \quad \Theta(f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

Montrer que $\Theta(f) \in E_1^0$ et est solution faible de (2).

4 d) Montrer que $\Theta(f) \in E_2^0$ et est donc également solution forte de (2).

5. On munit les espaces $C([0,1],\mathbb{R})$ et E_2^0 de la norme associée au produit scalaire usuel sur $L^2([0,1])$.

5.a) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall f \in C([0,1],\mathbb{R}), \quad ||\Theta(f)'||_2 \leq C||f||_2$$

5.b) En utilisant le théorème d'Ascoli, montrer que T est un opérateur compact sur $C([0,1],\mathbb{R})$.

5.c) En déduire qu'on peut prolonger Θ en un opérateur $\bar{\Theta}$ sur $L^2(0,1])$, continu et compact.

5.d) Montrer que $\bar{\Theta}$ est un opérateur autoadjoint.

N.B. On peut montrer que si $f \in L^2([0,1])$, $\bar{\Theta}(f) \in H_1^0([0,1])$ est solution faible de (2)

6. Par le théorème spectral, on note $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de vecteurs propres de $\bar{\Theta}$ associés aux valeurs propres λ_n.

6.a) Montrer, au sens de la convergence L^2, que

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\phi_n(y)}{\lambda_n}$$

6.b) Montrer que

$$\int_0^1 K(x,x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$$