

TD 2 : ESPACES DE FONCTIONS CONTINUES

Exercice 1.

Démontrer le théorème de prolongement d'une fonction uniformément continue définie sur un sous ensemble A dense d'un espace métrique (X, d) à valeurs dans un espace complet (Y, δ) en une fonction uniformément continue sur X .

Exercice 2.

(i) Soit (f_n) une suite de fonctions dans $\mathcal{C}([0, 1], [a, b])$ telle que la famille (f_n) est équicontinue. Montrer que (f_n) admet une sous-suite uniformément convergente.

(ii) Soit (f_n) une suite de fonctions dans $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f(x)|^2 dx + \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \leq 1$$

Montrer que (f_n) admet une sous-suite uniformément convergente.

(iii) Soit (f_n) une suite de fonctions dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telle que la suite $(f_n(0))_n$ est bornée et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq |x - y|^{\frac{1}{3}}$$

Montrer que (f_n) admet une sous-suite uniformément convergente. Montrer que le résultat n'est pas valable si la suite $(f_n(0))_n$ n'est pas bornée.

Exercice 3.

Soit F le sous ensemble de $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ (muni de la norme infinie) des fonctions à valeurs dans $[0, 1]$.

(i) F est-il fermé ? compact ?

(ii) Soit $K : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Pour tout $f \in F$, on considère la fonction $g = \Phi(f)$ telle que

$$\forall s \in [0, 1], \quad g(s) = \int_0^1 K(s, f(t)) dt$$

Montrer que $g \in F$ et que Φ est uniformément continue sur F .

(iii) Montrer que $\Phi(F)$ est relativement compacte dans E .

Exercice 4.

(i) Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$\int_a^b f(x) x^n dx = 0$$

Montrer que f est nulle sur $[a, b]$.

(ii) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et (P_n) une suite de polynômes convergent uniformément vers f . Montrer que f est un polynôme.

(iii) Soit (P_n) une suite de polynômes telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = f(x)$$

Peut-on conclure que f est un polynôme ?