TD 3 : LES GRANDS THEOREMES de l'AF (1/2)

Exercice 1.

On considère $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}([\frac{1}{4},\frac{3}{4}],\mathbb{R})$ munis de la convergence uniforme. Pour tout $h \in]0,\frac{1}{4}]$, on définit l'opérateur T_h de E dans F comme suit :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in E, \quad T_h(f)(x) = \frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x)\right)$$

a) Montrer que $T_h \in \mathcal{L}(E,F)$.

b) Montrer que pour tout $f \in E$, $(T_{2^{-n}}(f))_n$ converge vers un certain élément g dans F. En notant $g = T(f)$, T est-elle une application linéaire et continue ?

c) Quelle hypothèse manque et met ainsi en défaut le résultat du théorème de Banach Steinhaus ?

Exercice 2.

Soit F un sous espace vectoriel fermé de $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme. On suppose que tous les éléments de F sont dérivables.

a) Soit $y_0 \in [0,1]$ fixé. On pose pour tout $y \in [0,1]$ différent de y_0 et tout f de F,

$$L_y(f) = \frac{1}{y-y_0}(f(y) - f(y_0))$$

Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall f \in F, \quad \sup_{y \neq y_0} ||L_y(f)||_\infty \leq M||f||_\infty$$

b) En déduire que la boule unité fermée de F est équicontinue en y_0.

c) Montrer que la boule unité fermé de F est compacte.

d) Que conclure sur F ?

Exercice 3.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni d'une norme notée $||.||$ telle que E soit complet muni de cette norme et que si une suite (f_n) converge vers f pour cette norme alors, f_n converge simplement vers f.

a) Soit $t \in [0,1]$. Pour tout $f \in E$, on note $L_t(f) = f(t)$. Montrer que $L_t \in E'$.

b) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $||f||_\infty \leq C||f||$ pour tout $f \in E$.

c) En déduire que les normes $||.||$ et $||.||_\infty$ sont équivalentes.

Exercice 4.

Soit T un endommorphisme sur $E = L^2([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que T est continu de $(E,||.||_2)$ dans $(E,||.||_1)$. Montrer que T est continue de $(E,||.||_2)$ dans $(E,||.||_2)$.