TD 4 : LES GRANDS THEOREMES de l'AF (2/2)

Exercice 1.

a) Soit E un espace de Banach. On considère F et G deux sous espaces vectoriels fermés de E tels que $F+G$ soit fermé. Montrer qu'il existe $C>0$ tel que tout $x \in F+G$ peut se décomposer en une somme $x = y+z$ avec $||y|| \leq C||x||$ et $||z|| \leq C||x||$. Si de plus $F+G = E$ et $F \cap G = \{0\}$, on dit que F et G sont deux supplémentaires topologiques.

b) Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F deux espaces de Banach. On suppose que T est surjective. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $S \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $T \circ S = Id_F$.

(ii) Ker(T) admet un supplémentaire topologique.

Exercice 2.

a) Soit C un convexe de $\mathbb{R}^d$ et $x_0 \notin C$. Montrer qu'on peut séparer x_0 et C à savoir qu'il existe un hyperplan fermé $H = L^{-1}(\{\alpha\})$ tel que $L(x_0) \leq \alpha$ et $\forall x \in C, \quad L(x) \geq \alpha$.

b) Montrer que la propriété précédente n'est pas vérifiée en dimension infinie en prenant par exemple

$$C = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \subset L^1([0,1],\mathbb{R})$$

Exercice 3.

a) Montrer qu'un sous ensemble F d'un espace vectoriel réel E est dense si et seulement si pour toute forme linéaire $\phi \in E'$, $\phi(F) = 0$ implique que $\phi = 0$.

b) Pour tout $a > 1$, on note f_a la fonction dans $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f_a(x) = \frac{1}{x-a}$. Soit (a_n) une suite de réels strictement plus grands que 1 et tendant vers $+\infty$. Montrer que la famille (f_{a_n}) est dense dans E.

Exercice 4.

Soit E un evn et E' son dual topologique. On note S la sphère unité de E'.

a) On suppose que E' est strictement convexe, à savoir

$$(\Phi_1,\Phi_2) \in S^2, \quad \Phi_1 \neq \Phi_2 \implies \frac{1}{2}(\Phi_1+\Phi_2) \notin S$$

Soit F un sous espace vectoriel de E et L une forme linéaire continue sur F de norme 1. Montrer qu'il existe une unique forme linéaire continue $\tilde{L}$ sur E qui prolonge L et de norme 1.

b) On suppose que E' n'est pas strictement convexe. En notant $H = \text{Ker}(\Phi_1 - \Phi_2)$. Montrer que la restriction de Φ_1 à H possède deux prolongements continus distincts de norme 1.