UVSQ, Master Mathématiques Fondamentales — Année 2010/2011
Analyse fonctionnelle 2
http://www.math.uvsq.fr/~dumas/MSMA721.html

TD 5 : ESPACES DE HILBERT

Exercice 1.

On considère l'espace de Hilbert $H = L^2([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_d$ l'espace des fonctions polynômes sur $[0,1]$ de degré inférieur ou égal à d. Soit $f \in H$ fixé.

a) Montrer que l'application Φ de $\mathcal{P}_d$ dans $\mathbb{R}$ qui à P associé $\Phi(P) = ||f-P||_2$ atteint son minimum et que ce minimum est unique. Déterminer ce minimum dans le cas où $f(x) = x^3$ et $d = 2$.

b) Montrer que l'application Φ de $\mathcal{P}_d$ dans $\mathbb{R}$ qui à P associé $\Phi(P) = ||f-P||_\infty$ atteint son minimum. Quelle différence principale y a t-il avec le cas précédent ?

Exercice 2.

On considère l'espace $E = C([-1,1],\mathbb{R}) \subset L^2([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel. On considère la forme linéaire $\delta : E \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall f \in E, \quad \delta(f) = f(0).$$

Existe t-il un élément $f_0 \in E$ tel que $\forall f \in E, \quad \delta(f) = < f, f_0 >$?

Exercice 3.

On considère l'espace de Hilbert $H = L^2([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel. Pour $f \in H$ on note T l'opérateur tel que

$$\forall f \in H, \quad \forall x \in [0,1], \quad T(f)(x) = xf(x)$$

a) Montrer que T est un opérateur linéaire et continu. Calculer sa norme.

b) Vérifier que T est autoadjoint, à savoir :

$$\forall (f,g) \in H^2, \quad < T(f), g > = < f, T(g) >$$

c) Montrer que $\overline{\mathrm{Im}(T)} = \mathrm{Ker}(T)^\perp$

d) En déduire que $\mathrm{Im}(T)$ est un sous espace dense de H strictement inclus dans H.

Exercice 4.

On considère l'espace préhilbertien $E = C([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.

a) On considère la suite de fonction (f_n) de E telle que $f_n(t) = -1$ si $-1 \le t \le -\frac{1}{n}$, $f_n(t) = nt$ si $-\frac{1}{n} \le t \le \frac{1}{n}$ et $f_n(t) = 1$ si $\frac{1}{n} \le t \le 1$. Montrer que la suite (f_n) est de Cauchy mais ne converge pas dans E. Conclure.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note L_n la dérivée n-ième de la fonction $g \in E$ définie par

$$\forall t \in [-1,1], \quad g(t) = (t^2-1)^n$$

Montrer que L_n est un polynôme de degré n. Quel est son coefficient dominant ?

c) Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de E.

d) On note $\mathcal{P}_n$ le sous espace vectoriel de E formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer qu'on peut définir p_n le projecteur orthogonal de E sur $\mathcal{P}_n$.

e) Montrer à l'aide du théorème de Stone Weiertrass que pour tout $f \in E$, $\lim_{n\to+\infty} ||f - p_n(f)|| = 0$.

f) Montrer que pour tout $f \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{< f, L_k >}{||L_k||^2} L_k$$