TD 6 : CONVERGENCE ET TOPOLOGIE FAIBLE

Exercice 1. Soit $\alpha \in]1, +\infty[$. Pour $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$u_n(x) = \left(\frac{n}{1 + n^2|x|^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

a) Montrer que (u_n) converge presque partout vers la fonction nulle.

b) Montrer que dans le cas $\alpha < 2$, $||u_n||_2$ converge vers $+\infty$. La suite peut-elle converger fortement dans $L^2(]-1, 1[)$? A t-elle une sous suite convergeant faiblement ?

c) Montrer que dans le cas $\alpha > 2$, $||u_n||_2$ converge vers 0.

d) On suppose $\alpha = 2$. Montrer que la suite converge faiblement vers 0 (on admettra que la convergence faible implique la convergence presque partout). A t-elle une sous suite convergeant fortement ?

Exercice 2.

Soit $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (fonctions C^∞ à support compact).

a) Montrer que $u_n(x) = \Phi(x - n)$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R})$ et que cette convergence n'est pas forte (évanescence). On pourra utiliser le fait que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $v_n(x) = \sqrt{n}\phi(nx)$ converge faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$ et que cette convergence n'est pas forte (concentration). On pourra utiliser le fait que $\mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

c) Soit $w \in L^2(0, 2\pi)$ une fonction 2π périodique non constante. Montrer que $w_n(x) = w(nx)$ converge faiblement vers la fonction constante égale à $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w$ dans $L^2(0, 2\pi)$ et que cette convergence n'est pas forte (oscillations). On pourra commencer à étudier le cas où $w(x) = e^{ikx}$.

Exercice 3.

Soit H un espace de Hilbert séparable et (e_n) une base hilbertienne.

a) Montrer qu'une suite bornée (x_n) converge faiblement si et seulement si pour tout p, $< e_p, x_n >$ admet une limite réelle quand n tend vers $+\infty$.

b) Montrer que l'adhérence séquentielle faible de la sphère unité de H est la boule unité fermée de H.

c) On considère $F = \{e_m + me_n, (m, n) \in \mathbb{N}^{*2}\}$. 0 est-il dans l'adhérence séquentielle faible de F ? et dans l'adhérence séquentielle faible de l'adhérence séquentielle faible de F ? Qu'en conclure ?

Exercice 4.

Il est possible d'étendre la notion de convergence faible (et de topologie faible) aux espaces de Banach : soit E un Banach, on dit que la suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x \in E$ si et seulement si :

$$\forall f \in E', f(x_n) \to f(x)$$

Il s'agit en fait de la topologie la moins fine rendant continues tous les éléments de E'. On note $\sigma(E, E')$ cette topologie.

a) Montrer que si (x_n) converge fortement vers $x \in E$, alors (x_n) converge faiblement vers x.

b) Montrer que si (x_n) converge faiblement vers x, alors (x_n) est bornée et $||x|| \leq liminf||x_n||$. On pourra s'inspirer de la démonstration effectuée dans un Hilbert en invoquant un corollaire de Hahn Banach à la place du théorème de représentation de Riesz.

c) Montrer que si ϕ_n converge vers ϕ dans E' et (x_n) converge faiblement vers $x \in E$, alors $\phi(x_n)$ tend vers $\phi(x)$.

Exercice 5. (*à rendre pour le 20/10*)

On considère les deux espace vectoriels $E_1 = l^1(\mathbb{R})$ des suites réelles (x_j) telles que $\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j| < +\infty$ et $E_2 = l^\infty(\mathbb{R})$ des suites réelles bornées. Munis de leur norme naturelle, on rappelle que ces deux espaces vectoriels normés sont des espaces de Banach.

A tout élément $y \in l^\infty(\mathbb{R})$, on associe l'application T_y de $l^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in l^1, \quad T_y(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_j y_j$$

a) Montrer que $T_y \in l^1(\mathbb{R})'$.

b) Montrer que l'application $y \to T_y$ définit une isométrie bijective de l^∞ dans $l^1(\mathbb{R})'$. On peut donc identifier $l^1(\mathbb{R})'$ et l^∞.

c) Soit (x^n) une suite d'éléments de $l^1(\mathbb{R})$ convergeant faiblement vers 0 (voir définition dans l'exercice 4). On cherche à établir que (x^n) converge fortement vers 0. Il s'agit d'une propriété exceptionnelle de cet espace. A noter que les deux topologies faibles et fortes sont cependant distinctes.

Le raisonnement s'effectue par l'absurde.

(i) Montrer qu'on peut se limiter, quitte à extraire une sous suite, au cas où $||x^n||_1 = 1$ et (x^n) converge faiblement vers 0.

(ii) Construire par récurrence deux suites d'entiers naturels (j_k) et (n_k) strictement croissantes telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_k, \qquad \sum_{j=j_k}^{j_{k+1}-1} |x_j^{n_k}| \geq \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{j_k-1} |x_j^n| \leq \frac{1}{8}$$

(iii) Conclure le raisonnement par l'absurde en utilisant l'élément $w \in l^\infty(\mathbb{R})$ tel que $w_j = \mathrm{sgn}(x_j^{n_k})$ si $j_k \leq j < j \leq j_{k+1} - 1$.