TD 8 (1h) : OPERATEURS COMPACTS

Exercice

Soit X et Y deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $k \in L^2(X \times Y, \mathbb{R})$. On note T l'opérateur défini de $L^2(X)$ dans $L^2(Y)$ par

$$\forall f \in L^2(X), \quad \forall x \in X, \quad T(f)(y) = \int_X k(x, y) f(x) dx$$

a) Montrer que T définit un opérateur compact de $L^2(X)$ dans $L^2(Y)$, munis de leur structure d'espace de Hilbert habituelle. On pourra montrer que Tf_n converge fortement vers 0 si f_n converge faiblement vers 0.

b) On suppose à présent que $k \in C(X \times Y, \mathbb{R})$ et que X et Y sont compacts. Montrer que k est un opérateur compact de $L^2(X)$ dans $C(Y, \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. On pourra utiliser le théorème d'Ascoli ou montrer que T est limite d'opérateurs de rang fini.