TD 9 (1h) : SPECTRE DES OPERATEURS

Exercice

On note K la fonction définie sur $[0,1]$ par la relation : $K(s,t) = (1-s)t$ si $0 \leq t \leq s$ et $K(s,t) = (1-t)s$ sinon.

On définit l'opérateur T sur $H = L^2([0,1], \mathbb{R})$, par la relation :

$$\forall f \in H, \quad \forall s \in [0,1], \quad Tf(s) = \int_0^1 K(s,t)f(t)dt$$

a) Montrer que $T \in \mathcal{L}(H)$.

b) Soit $f \in H$. Montrer que Tf est une fonction continue sur $[0,1]$.

c) Calculer à s fixé la limite du taux d'accroissement quand h tend vers 0 :

$$\Delta_h = \frac{1}{h}\left(Tf(s+h) - Tf(s)\right)$$

En déduire que Tf est une fonction C^1 et exprimer $(Tf)'(s)$ comme la somme de deux intégrales.

d) Montrer que T est injectif.

e) Montrer que si f est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$, alors $f \in C^2$ et vérifie l'équation

$$\lambda f'' + f = 0$$

avec les conditions $f(0) = f(1) = 0$.

f) En déduire que les valeurs propres de T sont du type $\lambda_n = (n\pi)^{-2}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Calculer les sous-espaces propres associés.

g) Vérifier que la famille des vecteurs propres précédente forme une base hilbertienne de H.

h) Pour tout $g \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble des solution de l'équation $Tf - \lambda f = g$. On distinguera les deux particuliers où $\lambda = 0$ et $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$.

i) En déduire que $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$.

Question subsidiaire : montrer que T est un opérateur autoadjoint compact et calculer sa norme.