EXAMEN, 11 Janvier 2011, 10h-12h, correction

Exercice 1.

1. On montre facilement que

$$|T(f)| \leq ||f|| * sup\{e^t, t \in [0,1]\} = e||f||$$

ce qui montre que $T \in E'$ et $||T|| \leq e$.

2. Pour montrer que $||T|| \geq e$, on considère tout d'abord pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite de fonction affines par morceaux g_n telle que $g_n = 0$ (respectivement 1) sur $[0, 1 - \frac{1}{n}]$ (respectivement $[1 - \frac{1}{2n}, 1]$). On note ensuite $f_n(t) = e^{-it^2} g_n(t)$. On a

$$|T(f_n)| = \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} e^t g_n(t)dt \geq e^{1-\frac{1}{n}} \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} g_n(t)dt = e^{1-\frac{1}{n}} ||f_n||$$

ce qui permet aisément d'arriver au résultat.

Exercice 2.

1. Grâce à la propriété (i), on déduit l'existence d'une application $x \mapsto T_x$ de E dans F'. Il suffit ensuite de montrer que cette application, notée T est bien linéaire. Cela provient de la linéarité de a par rapport à sa première variable.
2. A y fixé, l'ensemble $\{T(x)(y), x \in B_E\}$ est aussi égal à $\{a(x, y), x \in B_E\}$. Il est borné grâce à la propriété (ii).
3. On utilise le théorème de Banach Steinhaus pour la famille des opérateurs $T(x) \in F'$ indexée par $x \in B_E$. Les hypothèses sont bien vérifiées (F Banach en particulier). On en déduit exactement que

$$\sup_{x \in B_E} ||T(x)||_{F'} < +\infty$$

4. En notant M la constante précédente, on a donc

$$\forall x \in B_E, \quad \forall y \in F, \quad |T(x)(y)| = |a(x, y)| \leq M||y||$$

ce qui permet de conclure ensuite aisément.

Exercice 3.

1. Pour répondre aux deux premières questions, on peut utiliser le cours et dire que T est un opérateur de Hilbert Schmidt associé au noyau K tel que $K(x, t) = 1$ si $t \leq x$ et 0 sinon. On remarque en effet facilement que, ainsi défini, $K \in L^2([0, 1] \times [0, 1], \mathbb{R})$.
2. Sinon, on peut le faire 'à la main' : pour la continuité, on a :

$$||T(f)||^2 = \int_0^1 | \int_0^x f(t)dt|^2 dx \leq \int_0^1 (\int_0^1 |f(t)|dt)^2 dx = (\int_0^1 |f(t)|dt)^2 \leq ||f||^2$$

par Cauchy Schwarz. Pour le caractère compact, On suppose que f_n est une suite qui converge faiblement vers 0 dans H. En écrivant

$$T(f_n)(x) = \int_0^1 f_n(t)k_x(t)dt$$

avec k_x la fonction qui vaut 1 si $t \leq x$ et 0 sinon, on constate que $T(f_n)$ converge simplement vers 0. D'autre part

$$|T(f_n)(x)| \leq \int_0^1 |f_n(t)|dt \leq ||f_n||_2 \leq C$$

car (f_n) est une suite faiblement convergente donc bornée dans H. Le théorème de convergence dominée permet de conclure que $T(f_n)$ converge fortement vers 0 dans H.

3. Comme T est compact dans le Hilbert H, 0 est un élément du spectre. D'autre part si $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, alors λ est une valeur propre de multiplicité finie. Soit f un vecteur propre associé. Nécessairement, comme $f = \frac{1}{\lambda}T(f)$, alors f est continue et même C^1. On a donc en particulier

$$\forall x \in [0,1], \quad f'(x) = \frac{1}{\lambda}f(x)$$

ce qui implique que $f(x) = Ce^{\frac{x}{\lambda}}$. Ceci n'est possible que si $f = 0$, seul cas où $f(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$. Ainsi $\sigma(T) = \{0\}$.

4. La continuité se montre aisément avec ce nouvel espace et cette nouvelle norme :

$$||T(f)||_\infty \leq ||f||_\infty$$

La compacité provient du théorème d'Ascoli : si (f_n) est une suite de fonction dans B_E, alors la famille $T(f_n)$ est une famille bornée et équicontinue :

$$|T(f_n)(x) - T(f_n)(y)| \leq ||f_n||_\infty |x-y|$$

Le spectre de T est inchangé. A noter que 0 est bien dans le spectre car T n'est pas surjectif, par exemple $f = 1$ n'a pas d'antécédent.