EXAMEN, 11 Janvier 2011, 10h-12h

Exercice 1.

On considère $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$ muni de la norme

$$||f|| = \int_0^1 |f(t)|dt$$

Pour $f \in E$, on note

$$T(f) = \int_0^1 f(t)e^{it^2+t}dt$$

1. Montrer que $T \in E'$.
2. Calculer la norme de T.

Exercice 2.

Soient E et F deux espace de Banach et a une application bilinéaire de $E \times F$ dans $\mathbb{R}$ telle que

(i) pour tout $x \in E$, l'application partielle $y \mapsto a(x,y) \in F'$

(ii) pour tout $y \in F$, l'application partielle $x \mapsto a(x,y) \in E'$

1. Montrer qu'il existe un opérateur T de E dans F' tel que
$$\forall (x,y) \in E \times F, \quad a(x,y) = T(x)(y)$$
2. Soit B_E la boule unité fermée de E . Montrer que pour tout $y \in F$, $\{T(x)(y), x \in B_E\}$ est un ensemble borné de $\mathbb{R}$.
3. En utilisant un théorème dont on énoncera précisément les hypothèses, montrer que
$$\sup_{x \in B_E} ||T(x)||_{F'} < +\infty$$
4. En déduire qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que
$$\forall (x,y) \in E \times F, \quad |a(x,y)| \leq M||x||||y||$$

Exercice 3.

On considère $H = L^2([0,1], \mathbb{R})$, l'espace de Hilbert formé des fonctions de carré sommable sur $[0,1]$ muni de sa norme usuelle. On considère l'opérateur linéaire T défini sur H par :

$$\forall f \in H, \quad \forall x \in [0,1], \quad T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

1. Montrer que T est un opérateur continu de H dans H.
2. Montrer que T est un opérateur compact.
3. Calculer le spectre de T.
4. Reprendre les questions 1, 2 et 3 avec $E = (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), ||.||_\infty)$ à la place de H.