UVSQ, Master Mathématiques Fondamentales — Année 2010/2011

Analyse fonctionnelle 2

`http://www.math.uvsq.fr/~dumas/MSMA721.html`

PARTIEL, 3 Novembre 2010

2 heures, aucun document autorisé

Les exercices sont tous indépendants.

Exercice 1. Soit E l'ensemble des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on note

$$||f||_a = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$$

et

$$||f||_b = |f(0)| + ||f'||_\infty$$

a) Montrer que les deux définitions précédentes définissent bien des normes et que celles-ci sont équivalentes.

b) Montrer que E muni de l'une quelconque de ces deux normes est complet.

Exercice 2. On considère l'espace de Hilbert $H = l^2(\mathbb{R})$ des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de carré sommable muni du produit scalaire :

$$< a, b >= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$

Soit (a_n) une suite réelle quelconque telle que pour tout $b \in H$, la série de terme général $(a_n b_n)$ converge.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère l'application Λ_k de H dans $\mathbb{R}$ qui à toute suite $b \in H$ associe la valeur

$$\Lambda_k(b) = \sum_{n=0}^{k} a_n b_n$$

a) Montrer que Λ_k est une application linéaire et continue et que pour tout $b \in H$, la suite $(\Lambda_k(b))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

b) Montrer que $a \in H$ (on pourra utiliser le théorème de Banach Steinhaus dont on rappellera l'énoncé).

Exercice 3. On considère l'espace de Hilbert $H = l^2(\mathbb{R})$ des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de carré sommable muni du produit scalaire :

$$< a, b >= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$$

a) Montrer que H est séparable et en déterminer une base hilbertienne (en le justifiant).

b) On note H_1 le sous espace de H formé des suites (u_n) telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 u_n^2 < +\infty$. Pour tout $(u, v) \in H_1^2$, on note

$$< u, v >_1= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 u_n v_n$$

Montrer que $< ., . >_1$ définit un produit scalaire et que H_1 muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert.

c) Montrer qu'il existe une isométrie bijective de H dans H_1 et en déduire que H_1 est séparable.

d) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note T_p l'application de H_1 dans H qui à toute suite (u_n) associe la même suite mais tronquée après l'indice p (au delà duquel elle prend la valeur 0). Montrer que

$$\lim_{p\to+\infty} ||T_p - Id||_{\mathcal{L}(H_1,H)} = 0$$

où Id désigne l'application identité de H_1 dans H.

Exercice 4.

On considère un espace de Hilbert séparable H possédant une base hilbertienne notée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Vérifier que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0.

b) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels bornés. On note

$$u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} a_i e_i$$

Montrer que (u_n) converge fortement vers 0 et que $(\sqrt{n}u_n)$ converge faiblement vers 0.