UVSQ, Master Mathématiques Fondamentales Année 2010/2011
Analyse fonctionnelle 2
`http://www.math.uvsq.fr/~dumas/MSMA721.html`

EXAMEN session 2, 22 Juin 2011, 14h-16h

Exercice 1.

On munit les espaces $E = \{f \in C^2([0,1],\mathbb{C}), f(0) = f(1) = 0\}$ et $F = C([0,1],\mathbb{C})$ de la norme de la convergence uniforme $||.||_\infty$.

1. Montrer que l'application $\Phi : f \to f''$ est un isomorphisme entre E est F. Est-il continu ?
2. Si $g \in F$, on considère l'application $G : x \mapsto \int_0^1 |x-t|g(t)dt$. Montrer que G est de classe C^2 sur $[0,1]$ et déterminer G''.
3. Trouver $k \in C([0,1]^2,\mathbb{C})$ tel que pour tout $g \in F$, $\Phi^{-1}(g)$ soit l'application $x \mapsto \int_0^1 k(x,t)g(t)dt$.
4. Montrer que Φ^{-1} est une application continue de F dans E et calculer sa norme.

Exercice 2.

Soit $p \in]1,+\infty[$. On considère l'espace $E = l^p(\mathbb{N})$ des suites $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que

$$||x||_p = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

muni de la norme $||.||_p$. On dit que la suite d'éléments de E, $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, converge faiblement vers $x^* \in E$ si pour tout $y \in E' = l^q(\mathbb{N})$ (avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), alors

$$\lim_{n\to\infty} < x^n - x^*, y >= \sum_{k=0}^{+\infty} (x^n_k - x^*_k)y_k = 0$$

1. Montrer que si $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $x^* \in E$, alors $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x^* \in E$.
2. Construire un exemple de suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant faiblement vers $x^* \in E$ mais non fortement convergente.
3. On considère une suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||x^n||_p \leq 1$. Montrer que cette suite possède une sous suite convergeant faiblement. On pourra commencer par utiliser le théorème de Bolzano Weierstrass dans $\mathbb{R}$ puis le procédé diagonal.

Exercice 3.

On considère l'espace $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $||.||_\infty$ et un élément $g \in E$. Soit la partie

$$A_g = \{u \in E, \quad \forall (x,y) \in [0,1], \quad |u(x) - u(y)| \leq |g(x) - g(y)|\}$$

1. Montrer que A_g est une partie fermée de E.
2. La partie A_g est-elle bornée ?
3. Montrer que $A_g \cap \bar{B}(0,1)$ est relativement compacte.