TD 1 : RAPPELS ET COMPLEMENTS SUR LES EVN

Exercice 1.

Soit N fixé dans $\mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^N$.

On définit pour tout $p > 0$, la norme $||.||_p$ de E par la formule :

$$\forall x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N, \quad ||x||_p = (\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

avec la convention $|x|^p = \exp(p \ln(|x|))$ si $x \neq 0$ et 0 sinon.

a) Montrer que pour tout $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$,

$$\lim_{p \to +\infty} ||x||_p = ||x||_\infty$$

où

$$||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

b) Soit $x = (x_1, ..., x_N)$ fixé dans $\mathbb{R}^N$. Montrer que l'application φ définie de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et telle que $\varphi(p) = ||x||_p$ est décroissante.

c) Soit $(p_1, p_2) \in]0, +\infty[^2$ tels que $p_1 < p_2$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\lambda ||x||_{p_1} \leq ||x||_{p_2} \leq ||x||_{p_1}$$

avec

$$\lambda = N^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}}$$

d) Montrer que chaque inégalité précédente possède un cas d'égalité pour un certain $x \in \mathbb{R}^N$ non nul.

Exercice 2.

On considère l'evn $E = l^\infty(\mathbb{R})$ muni de sa norme naturelle. On note C_0, respectivement F, le sev de E des suites convergeant vers 0, respectivement nulles à partir d'un certain rang.

a) Montrer que l'adhérence de F est égale à C_0.

b) Montrer que C_0 est complet. Qu'en est-il de F ?

Exercice 3.

On considère l'evn $E = C_0(\mathbb{N})$ des suites convergeant vers 0 muni de la norme infinie. On fixe $u \in l^1(\mathbb{N})$ et on considère l'application Φ_u de E dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall v \in E, \quad \Phi_u(v) = \sum_{i=1}^{+\infty} u_n v_n$$

a) Montrer que Φ_u est bien définie et appartient à E'.

b) Montrer que $\Phi : u \mapsto \Phi_u$ est une isométrie bijective de l^1 dans E'.

Exercice 4.

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme infinie. Pour $f \in E$, on note K l'application telle que

$$\forall x \in E, \quad K(f)(x) = xf(\frac{x}{2})$$

a) Montrer que K est linéaire et continue de E dans E. Calculer sa norme.

b) Déterminer $Ker(K)$ et $Im(K)$.

c) On se place à présent dans $F = L^2([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $||.||_2$. Montrer que K est linéaire et continue de F dans F et calculer sa norme.

Exercice 5.

On considère les evn $E = \{f \in C^2([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = f(1) = 0\}$ et $F = C([0,1], \mathbb{R})$ munis de la norme uniforme.

a) Montrer que l'application $\Phi : f \to f''$ est un isomorphisme entre les espaces vectoriels E et F. Φ est-elle continue ?

b) Si $g \in F$, on définit $G : x \mapsto \int_0^1 |x-t|g(t)dt$. Montrer que G est de classe C^2 sur $[0,1]$ et déterminer G''.

c) Trouver $k \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$ tel que pour tout $g \in F$, $\Phi^{-1}(g)$ soit l'application $x \mapsto \int_0^1 k(x,t)g(t)dt$.

d) Montrer que Φ^{-1} est continue et calculer sa norme.