TD 11 : DEUX CLASSES D'OPERATEURS

Exercice 1 (opérateurs de Hilbert Schmidt dans un espace de Hilbert quelconque)

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et B (respectivement B') une base Hilbertienne de H_1 (respectivement H_2).

a) Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que la quantité (éventuellement infinie)

$$\sum_{(b,b')\in B\times B'} | < b', T(b) > |^2$$

ne dépend pas des bases B et B'.

On note cette quantité $||T||_2$. et on pose

$$\mathcal{L}^2(H_1, H_2) = \{T \in \mathcal{L}(H_1, H_2), \quad ||T||_2 < +\infty\}$$

b) Montrer que si $T \in \mathcal{L}^2(H_1, H_2)$, alors pour toute base Hilbertienne $B = (b_n)_n$ de H_1, la suite $(T(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

c) Montrer que si $T \in \mathcal{L}^2(H_1, H_2)$, alors T est compact. On pourra supposer que T n'est pas limite d'une suite d'opérateurs de rang fini et aboutir à une contradiction.

d) Soient S et T dans $\mathcal{L}^2(H_1, H_2)$ et B une base hilbertienne de H_1. Montrer que la quantité

$$< S, T >_2 = \sum_{b\in B} < S(b), T(b) >$$

est finie, indépendante de la base B choisie et définit un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(H_1, H_2)$.

e) Montrer que $\mathcal{L}^2(H_1, H_2)$ muni du produit scalaire précédent est un espace de Hilbert. On pourra remarquer que $||T||_2 \geq ||T||$ pour tout $T \in \mathcal{L}^2(H_1, H_2)$.

f) Soit T un opérateur compact, autoadjoint. Montrer que

$$||T||_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^2$$

où la famille $(\lambda_n)_n$ représente la famille des valeurs propres de l'opérateur T.

g) On suppose pour simplifier que $H_1 = H_2$ et on considère S et T deux opérateurs continus sur H. Montrer que si $S \in \mathcal{L}^2(H)$, alors il en est de même pour TS avec

$$||TS||_2 \leq ||T||.||S||_2$$

Que se passe t-il pour TS en supposant cette fois que $T \in \mathcal{L}^2(H)$?

h) dans le cas où $H_1 = L^2(X, \mathbb{R})$ et $H_2 = L^2(Y, \mathbb{R})$ avec X et Y segments de $\mathbb{R}$, montrer que l'ensemble $\mathcal{L}^2(H_1, H_2)$ coincide avec l'ensemble des opérateurs à noyau L^2 définis en cours avec $||T||_2 = ||K||_{L^2}$.

Exercice 2 (opérateurs nucléaires)

On reprend les notations de l'exercice précédent et on considère ici T un opérateur autoadjoint sur H (c'est à dire $T = T^*$), positif (c'est à dire $\forall x \in H,\ < T(x), x > \geq 0$).

On note $\mathcal{L}_+(H)$ l'ensemble de tels opérateurs.

a) Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)_+$, la quantité (éventuellement infinie)

$$Tr(T) = \sum_{b\in B} < T(b), b >$$

est indépendante de la base hilbertienne B de H. On admettra qu'il existe $S \in \mathcal{L}(H)$ tel que $T = SS^*$.

b) Montrer que si S et $T \in \mathcal{L}(H)_+$, alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad Tr(S + \lambda T) = Tr(S) + \lambda Tr(T)$$

c) Soit $U \in \mathcal{L}(H)$ tel que $UU^* = Id$ et $T \in \mathcal{L}(H)_+$. Montrer que

$$Tr(UTU^*) = Tr(T)$$

d) Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)_+$ est compact, alors la somme des valeurs propres de T comptées avec leur multiplicité est égale à $Tr(T)$.

e) Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. On admet qu'il existe un unique $|T| \in \mathcal{L}(H)_+$ tel que $|T|^2 = T^*T$.

On note alors $||T||_1 = Tr(T_+)$ et

$$\mathcal{L}^1(H) = \{T \in \mathcal{L}(H), \quad ||T||_1 < +\infty\}$$

Montrer que si $T \in \mathcal{L}^1(H)$, alors $T \in \mathcal{L}^2(H)$ et est donc compact. On pourra utiliser le fait admis que tout élémént de $\mathcal{L}(H)_+$ admet une racine carrée dans $\mathcal{L}(H)_+$.

Remarque : on peut montrer que $\mathcal{L}^1(H)$ muni de la norme $||.||_1$ est complet.