UVSQ, Master Mathématiques Fondamentales — Année 2011/2012
Analyse fonctionnelle 2
http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MSMA721.html

TD 2 : ESPACES DE FONCTIONS CONTINUES

Exercice 1.

(i) Soit (f_n) une suite de fonctions dans $\mathcal{C}([0,1],[a,b])$ telle que la famille (f_n) est équicontinue. Montrer que que (f_n) admet une sous-suite uniformément convergente.

(ii) Soit (f_n) une suite de fonctions dans $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 |f(x)|^2 dx + \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \leq 1$$

Montrer que (f_n) admet une sous-suite uniformément convergente.

(iii) Soit (f_n) une suite de fonctions dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que la suite $(f_n(0))_n$ est bornée et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq |x-y|^{\frac{1}{3}}$$

Montrer que (f_n) admet une sous-suite uniformément convergente. Montrer que le résultat n'est pas valable si la suite $(f_n(0))_n$ n'est pas bornée.

Exercice 2.

Soit F le sous ensemble de $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ (muni de la norme infinie) des fonctions à valeurs dans $[0,1]$.

(i) F est-il fermé ? compact ?

(ii) Soit $K : [0,1]^2 \to [0,1]$ une fonction continue. Pour tout $f \in F$, on considère la fonction $g = \Phi(f)$ telle que

$$\forall s \in [0,1], \quad g(s) = \int_0^1 K(s, f(t))dt$$

Montrer que $g \in F$ et que Φ est uniformément continue sur F.

(iii) Montrer que $\Phi(F)$ est relativement compacte dans E.

Exercice 3.

(i) Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$\int_a^b f(x)x^n dx = 0$$

Montrer que f est nulle sur $[a,b]$.

(ii) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et (P_n) une suite de polynômes convergent uniformément vers f. Montrer que f est un polynôme.

(iii) Soit (P_n) une suite de polynômes telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} P_n(x) = f(x)$$

Peut-on conclure que f est un polynôme ?