TD 3 : LES GRANDS THEOREMES de l'AF (1/2)

Exercice 1.

On considère $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}([\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], \mathbb{R})$ munis de la convergence uniforme. Pour tout $h \in]0, \frac{1}{4}]$, on définit l'opérateur T_h de E dans F comme suit :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], \quad T_h(f)(x) = \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x))$$

- Montrer que $T_h \in \mathcal{L}(E, F)$.
- Montrer que pour tout $f \in E$, $(T_{2^{-n}}(f))_n$ converge vers un certain élément g dans F . En notant $g = T(f)$, T est-elle une application linéaire et continue ?
- Quelle hypothèse manque et met ainsi en défaut le résultat du théorème de Banach Steinhaus ?

Exercice 2.

Soit F un sous espace vectoriel fermé de $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme. On suppose que tous les éléments de F sont dérivables.

- Soit $y_0 \in [0, 1]$ fixé. On pose pour tout $y \in [0, 1]$ différent de y_0 et tout f de F ,

$$L_y(f) = \frac{1}{y - y_0} (f(y) - f(y_0))$$

Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall f \in F, \quad \sup_{y \neq y_0} |L_y(f)| \leq M \|f\|_\infty$$

- En déduire que la boule unité fermée de F est équicontinue en y_0 .
- Montrer que la boule unité fermée de F est compacte.
- Que conclure sur F ?

Exercice 3.

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni d'une norme notée $\|\cdot\|$ telle que E soit complet muni de cette norme et que si une suite (f_n) converge vers f pour cette norme alors, f_n converge simplement vers f .

- Soit $t \in [0, 1]$. Pour tout $f \in E$, on note $L_t(f) = f(t)$. Montrer que $L_t \in E'$.
- En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leq C \|f\|$ pour tout $f \in E$.
- En déduire que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

Exercice 4.

Soit T un endomorphisme sur $E = L^2([0, 1], \mathbb{R})$. On suppose que T est continu de $(E, \|\cdot\|_2)$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Montrer que T est continu de $(E, \|\cdot\|_2)$ dans $(E, \|\cdot\|_2)$.