

TD 4 : LES GRANDS THEOREMES de l'AF (2/2)

Exercice 1.

a) Soit E un espace de Banach. On considère F et G deux sous espaces vectoriels fermés de E tels que $F + G$ soit fermé. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que tout $x \in F + G$ peut se décomposer en une somme $x = y + z$ avec $\|y\| \leq C\|x\|$ et $\|z\| \leq C\|x\|$. Si de plus $F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$, on dit que F et G sont deux supplémentaires topologiques.

b) Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F deux espaces de Banach. On suppose que T est surjective. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe $S \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $T \circ S = Id_F$.
- (ii) $\text{Ker}(T)$ admet un supplémentaire topologique.

Exercice 2.

a) Soit C un convexe de $\mathbb{R}^d$ et $x_0 \notin C$. Montrer qu'on peut séparer x_0 et C à savoir qu'il existe un hyperplan fermé $H = L^{-1}(\{\alpha\})$ tel que $L(x_0) \leq \alpha$ et $\forall x \in C, L(x) \geq \alpha$.

b) Montrer que la propriété précédente n'est pas vérifiée en dimension infinie en prenant par exemple

$$C = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \subset L^1([0, 1], \mathbb{R})$$

Exercice 3.

a) Montrer qu'un sous espace vectoriel F d'un espace vectoriel réel E est dense si et seulement si pour toute forme linéaire $\phi \in E'$, $\phi(F) = 0$ implique que $\phi = 0$.

b) Pour tout $a > 1$, on note f_a la fonction dans $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f_a(x) = \frac{1}{x-a}$. Soit (a_n) une suite de réels strictement plus grands que 1 et tendant vers $+\infty$. Montrer que l'espace vectoriel engendré par la famille (f_{a_n}) est dense dans E .

Exercice 4.

Soit E un evn et E' son dual topologique. On note S la sphère unité de E' .

a) On suppose que E' est strictement convexe, à savoir

$$(\Phi_1, \Phi_2) \in S^2, \quad \Phi_1 \neq \Phi_2 \implies \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2) \notin S$$

Soit F un sous espace vectoriel non nul de E et L une forme linéaire continue sur F de norme 1. Montrer qu'il existe une unique forme linéaire continue $\tilde{L}$ sur E qui prolonge L et de norme 1.

b) On suppose que E' n'est pas strictement convexe. En notant $H = \text{Ker}(\Phi_1 - \Phi_2)$. Montrer que la restriction de Φ_1 à H possède deux prolongements continus distincts de norme 1.