UVSQ, Master Mathématiques Fondamentales Année 2011/2012
Analyse fonctionnelle 2
http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MSMA721.html

TD 5 : ESPACES DE HILBERT

Exercice 1.

On considère l'espace de Hilbert $H = L^2([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_d$ l'espace des fonctions polynômes sur $[0,1]$ de degré inférieur ou égal à d. Soit $f \in H$ fixé.

a) Montrer que l'application Φ de $\mathcal{P}_d$ dans $\mathbb{R}$ qui à P associé $\Phi(P) = ||f - P||_2$ atteint son minimum et que ce minimum est unique. Déterminer ce minimum dans le cas où $f(x) = x^3$ et $d = 2$.

b) Soit $f \in H \cap L^\infty([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que l'application Φ de $\mathcal{P}_d$ dans $\mathbb{R}$ qui à P associé $\Phi(P) = ||f - P||_\infty$ atteint son minimum. Quelle différence principale y a t-il avec le cas précédent ?

Exercice 2.

On considère l'espace de Hilbert $H = L^2([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel. On considère la forme linéaire $\delta : H \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall f \in H, \quad \delta(f) = f(0).$$

a) A t-on δ continue ?

b) Existe t-il un élément $f_0 \in H$ tel que $\forall f \in H, \quad \delta(f) =< f, f_0 >$?

Exercice 3.

On considère l'espace de Hilbert $H = L^2([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel. Pour $f \in H$ on note T l'opérateur tel que

$$\forall f \in H, \quad \forall x \in [0,1], \quad T(f)(x) = xf(x)$$

a) Montrer que T est un opérateur linéaire et continu. Calculer sa norme.

b) Vérifier que T est autoadjoint, à savoir :

$$\forall (f,g) \in H^2, \quad < T(f), g >=< f, T(g) >$$

c) Montrer que $\overline{\mathrm{Im}(T)} = \mathrm{Ker}(T)^\perp$.

d) En déduire que $\mathrm{Im}(T)$ est un sous espace dense de H strictement inclus dans H.