TD 6 : ESPACES DE HILBERT

Exercice 1.

Soit H un espace de Hilbert et T une application linéaire de H dans H telle que pour tous x et y dans H,

$$< Tx, y >=< x, Ty >$$

Montrer que T est continue (on pourra appliquer le théorème du graphe fermé).

Exercice 2.

On considère l'espace préhilbertien $E = C([-1,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.

a) On considère la suite de fonction (f_n) de E telle que $f_n(t) = -1$ si $-1 \leq t \leq -\frac{1}{n}$, $f_n(t) = nt$ si $-\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n}$ et $f_n(t) = 1$ si $\frac{1}{n} \leq t \leq 1$. Montrer que la suite (f_n) est de Cauchy mais ne converge pas dans E. Conclure.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note L_n la dérivée n-ième de la fonction $g \in E$ définie par

$$\forall t \in [-1,1], \quad g(t) = (t^2 - 1)^n$$

Montrer que L_n est un polynôme de degré n. Quel est son coefficient dominant ?

c) Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de E.

d) On note $\mathcal{P}_n$ le sous espace vectoriel de E formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer qu'on peut définir p_n le projecteur orthogonal de E sur $\mathcal{P}_n$.

e) Montrer à l'aide du théorème de Stone Weierstrass que pour tout $f \in E$, $\lim_{n\to+\infty} ||f - p_n(f)|| = 0$.

f) Montrer que pour tout $f \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{< f, L_k >}{||L_k||^2} L_k$$

Exercice 3. (contrôle continu 2010)

On considère l'espace de Hilbert $H = l^2(\mathbb{R})$ des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de carré sommable muni du produit scalaire :

$$< a, b >= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$$

a) Montrer que H est séparable et en déterminer une base hilbertienne (en le justifiant).

b) On note H_1 le sous espace de H formé des suites (u_n) telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 u_n^2 < +\infty$. Pour tout $(u, v) \in H_1^2$, on note

$$< u, v >_1= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 u_n v_n$$

Montrer que $< .,. >_1$ définit un produit scalaire et que H_1 muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert.

c) Montrer qu'il existe une isométrie bijective de H dans H_1 et en déduire que H_1 est séparable.

d) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note T_p l'application de H_1 dans H qui à toute suite (u_n) associe la même suite mais tronquée après l'indice p (au delà duquel elle prend la valeur 0). Montrer que

$$\lim_{p\to+\infty} ||T_p - Id||_{\mathcal{L}(H_1,H)} = 0$$

où Id désigne l'application identité de H_1 dans H.