UVSQ, Master Mathématiques Fondamentales Année 2011/2012
Analyse fonctionnelle 2
http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MSMA721.html

TD 7 : Révisions

Exercice 1. (contrôle continu 2010)

Soit E l'ensemble des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on note

$$||f||_a = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$$

et

$$||f||_b = |f(0)| + ||f'||_\infty$$

a) Montrer que les deux définitions précédentes définissent bien des normes et que celles-ci sont équivalentes.

b) Montrer que E muni de l'une quelconque de ces deux normes est complet.

Exercice 2. (examen 2008)

Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions vérifiant

$$\exists L > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq L|x-y| \quad \text{et} \quad |f_n(0| \leq L$$

a) Montrer que $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une famille équicontinue

b) Montrer qu'il existe $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Exercice 3 (contrôle continu 2006)

On note $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie. Pour $u \in L^1(\mathbb{R})$ et $x \in [0,1]$, on note

$$Ku(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{u(y)}{1+x^2+y^2} dy$$

a) Montrer que pour tout $u \in L^1(\mathbb{R})$, on a $Ku \in E$.

b) Montrer que $K : L^1(\mathbb{R}) \to E$ est continue et calculer sa norme.

c) Montrer que $K(B_{L^1}(0,1))$ est relativement compact dans E

Exercice 4 (examen 2008)

Soit E un espace de Banach et P une application linéaire de E dans E telle que $P^2 = P$ et $\mathrm{Im}(P)$ et $\mathrm{Ker}(P)$ sont fermés.

a) Montrer que si (u_n, Pu_n) converge vers (u,v) dans $E \times E$, alors $u - v \in \mathrm{Ker}(P)$ et $v \in \mathrm{Im}(P)$.

b) Montrer que P est continue.

Exercice 5. (contrôle continu 2010)

On considère l'espace de Hilbert $H = l^2(\mathbb{R})$ des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de carré sommable muni du produit scalaire :

$$< a,b >= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$

Soit (a_n) une suite réelle quelconque telle que pour tout $b \in H$, la série de terme général $(a_n b_n)$ converge.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère l'application Λ_k de H dans $\mathbb{R}$ qui à toute suite $b \in H$ associe la valeur

$$\Lambda_k(b) = \sum_{n=0}^{k} a_n b_n$$

a) Montrer que Λ_k est une application linéaire et continue et que pour tout $b \in H$, la suite $(\Lambda_k(b))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

b) Montrer que $a \in H$ (on pourra utiliser le théorème de Banach Steinhaus dont on rappellera l'énoncé).