TD 8 : CONVERGENCE ET TOPOLOGIE FAIBLE

Exercice 1. Soit $\alpha \in]1, +\infty[$. Pour $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$u_n(x) = \left(\frac{n}{1 + n^2|x|^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

a) Montrer que (u_n) converge presque partout vers la fonction nulle.

b) Montrer que dans le cas $\alpha < 2$, $||u_n||_2$ converge vers $+\infty$. La suite peut-elle converger fortement dans $L^2(]-1, 1[)$? A t-elle une sous suite convergeant faiblement ?

c) Montrer que dans le cas $\alpha > 2$, $||u_n||_2$ converge vers 0.

d) On suppose $\alpha = 2$. Montrer que la suite converge faiblement vers 0 (on admettra que la convergence faible implique la convergence presque partout). A t-elle une sous suite convergeant fortement ?

Exercice 2.

Soit $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (fonctions C^∞ à support compact).

a) Montrer que $u_n(x) = \Phi(x - n)$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R})$ et que cette convergence n'est pas forte (évanescence). On pourra utiliser le fait que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $v_n(x) = \sqrt{n}\phi(nx)$ converge faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$ et que cette convergence n'est pas forte (concentration). On pourra utiliser le fait que $\mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

c) Soit $w \in L^2(0, 2\pi)$ une fonction 2π périodique non constante. Montrer que $w_n(x) = w(nx)$ converge faiblement vers la fonction constante égale à $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w$ dans $L^2(0, 2\pi)$ et que cette convergence n'est pas forte (oscillations). On pourra commencer à étudier le cas où $w(x) = e^{ikx}$.

Exercice 3.

Soit H un espace de Hilbert séparable et (e_n) une base hilbertienne.

a) Montrer qu'une suite bornée (x_n) converge faiblement si et seulement si pour tout p, $< e_p, x_n >$ admet une limite réelle quand n tend vers $+\infty$.

b) Montrer que l'adhérence faible de la sphère unité de H est la boule unité fermée de H.

c) On considère $F = \{e_m + me_n, \ (m, n) \in \mathbb{N}^{*2}\}$. 0 est-il dans l'adhérence faible de F ? et dans l'adhérence faible de l'adhérence faible de F ? Qu'en conclure ?

Exercice 4.

Il est possible d'étendre la notion de convergence faible (et de topologie faible) aux espaces de Banach : soit E un Banach, on dit que la suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x \in E$ si et seulement si :

$$\forall f \in E', f(x_n) \to f(x)$$

Il s'agit en fait de la topologie la moins fine rendant continues tous les éléments de E'. On note $\sigma(E, E')$ cette topologie.

a) Montrer que si (x_n) converge fortement vers $x \in E$, alors (x_n) converge faiblement vers x.

b) Montrer que si (x_n) converge faiblement vers x, alors (x_n) est bornée et $||x|| \leq liminf||x_n||$. On pourra s'inspirer de la démonstration effectuée dans un Hilbert en invoquant un corollaire de Hahn Banach à la place du théorème de représentation de Riesz.

c) Montrer que si ϕ_n converge vers ϕ dans E' et (x_n) converge faiblement vers $x \in E$, alors $\phi(x_n)$ tend vers $\phi(x)$.