TD 9 : OPERATEURS COMPACTS

Exercice 1

Soit $H = L^2((0, 2\pi), \mathbb{C})$ muni du produit scalaire

$$< f, g >_H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\bar{g}(t)dt$$

et

$$H^1 = \{f \in H, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1 + n^2)|c_n(f)|^2 < +\infty\}$$

muni du produit scalaire

$$< f, g >_{H^1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1 + n^2)c_n(f)\bar{c}_n(g)$$

Montrer que l'injection de H^1 dans H est un opérateur compact.

Exercice 2

Soit X et Y deux segments de $\mathbb{R}$ et $k \in C(X \times Y, \mathbb{R})$. On note T l'opérateur défini de $L^2(X)$ dans $C(Y, \mathbb{R})$ par

$$\forall f \in L^2(X), \quad \forall x \in X, \quad T(f)(y) = \int_X k(x, y)f(x)dx$$

Montrer que k est un opérateur compact de $L^2(X)$ dans $C(Y, \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. On pourra utiliser le théorème d'Ascoli ou montrer que T est limite d'opérateurs de rang fini.

Exercice 3

On note K la fonction définie sur $[0, 1]$ par la relation : $K(s, t) = (1-s)t$ si $0 \leq t \leq s$ et $K(s, t) = (1-t)s$ sinon.

On définit l'opérateur T sur $H = L^2([0, 1], \mathbb{R})$, par la relation :

$$\forall f \in H, \quad \forall s \in [0, 1], \quad Tf(s) = \int_0^1 K(s, t)f(t)dt$$

a) Montrer que $T \in \mathcal{L}(H)$.

b) Soit $f \in H$. Montrer que Tf est une fonction continue sur $[0, 1]$.

c) Calculer à s fixé la limite du taux d'accroissement quand h tend vers 0 :

$$\Delta_h = \frac{1}{h}\left(Tf(s + h) - Tf(s)\right)$$

En déduire que Tf est une fonction C^1 et exprimer $(Tf)'(s)$ comme la somme de deux intégrales.

d) Montrer que T est un opérateur autoadjoint compact.