EXAMEN

10 Janvier 2012, 10h-12h

Exercice 1.

On note $E = C([0,1],\mathbb{R})$ qu'on munit de la norme infinie.

1. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall f \in E, \quad \varphi(f) = \int_0^1 (2y-1)f(y)dy$$

Montrer que $\varphi \in E'$ et calculer sa norme.

2. On considère l'application T de E dans E telle que

$$\forall f \in E, \quad T(f)(x) = \int_0^1 \cos(xy)f(y)dy$$

Montrer que T est un opérateur compact de E.

Exercice 2.

Soit H un Hilbert et $S \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$\forall u \in H, \quad \langle S(u), u\rangle \geq 0$$

1. Montrer que

$$\forall u \in Ker(S), \quad \forall v \in H, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad t\langle Sv, tv-u\rangle \geq 0$$

En déduire que $Ker(S) \subset Im(S)^\perp$.

2. Montrer que $Ker(S) = Im(S)^\perp$ (on pourra se servir de S^*). Que vaut alors $Ker(S)^\perp$?

3. En utilisant le théorème de Lax Milgram (qu'on énoncera précisément), montrer que $I+tS$ est bijectif pour tout $t > 0$.

Exercice 3.

On considère $E = l^2(\mathbb{R})$ muni de sa norme naturelle $||.||_2$. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée quelconque.

1. Montrer que l'application f de E dans E telle que $f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\lambda_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et est continue. Calculer sa norme.

2. Calculer le spectre de l'application f (on en rappellera la définition).

3. Donner un exemple de suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle le spectre de f est égal à $[0,2]$.