

EXAMEN CONTROLE CONTINU

4 Novembre 2011, 13h30-15h

Exercice 1.

On considère une famille $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 g_n^2(x) dx \leq 1$$

On considère les fonctions $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \int_0^x g_n(t) dt$$

- a) Montrer qu'on peut extraire de la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.
- b) Montrer, en construisant un contre-exemple, que le résultat précédent n'est pas valable pour la famille $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2.

Soit $H = L^2([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$ muni de la norme quadratique usuelle qui en fait un espace de Hilbert et $E = \mathcal{C}([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie. On considère l'application $T : H \rightarrow E$ telle que

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad Tf(x) = \int_0^x f(t) \cos t dt$$

- a) Montrer que T est correctement définie et est une application linéaire continue de H dans E .
- b) Calculer $\|T\|$.
- c) Montrer que l'image par T de la boule unité de H est relativement compacte dans E .

Exercice 3.

Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie et séparable. On note $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H .

- a) Donner un exemple de base hilbertienne dans le cas où $H = l^2(\mathbb{R})$.
- b) Soit $x \in H$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x, e_n \rangle = 0$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - e_n\| = 0$.
- c) Montrer que $F = \{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble fermé borné.
- d) En calculant $\|e_n - e_m\|$, montrer que F n'est jamais compact.

Exercice bonus

Soit E et F deux espaces de Banach et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F telle que pour tout x dans E , $T_n(x)$ tend vers $T(x)$. Montrer que pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers $x \in E$, alors $T_n(x_n)$ converge vers $T(x)$.

On pourra utiliser un des grands théorèmes de l'analyse fonctionnelle qu'on énoncera précisément.