

TD2 : Différences finies

Exercice 1 - Étude d'un schéma aux différences finies pour un problème 1D

Soit f une fonction régulière. On souhaite approcher la solution du problème

$$(P) \begin{cases} -u''(x) + \frac{u'(x)}{1+x} = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

par la méthode des différences finies. Pour cela on considère une discrétisation $(x_0, \dots, x_{N+1})$ de $[0, 1]$ à pas h constant, ainsi que le schéma à trois points usuel pour la dérivée seconde :

$$\frac{1}{h^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) \simeq u''(x_i), \quad x_i = ih.$$

et le schéma centré suivant pour la dérivée première,

$$\frac{1}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) \simeq u'(x_i).$$

1. Ecrire le problème approché sous la forme d'un système linéaire $A_h u_h = b_h$ en explicitant soigneusement la matrice A_h et le second membre b_h . Quel est l'ordre de consistance du schéma ?
2. Une matrice est dite "monotone" si elle est inversible et si sa matrice inverse est positive, au sens où tous ses coefficients sont positifs ou nuls. Montrer que la matrice A_h est monotone.
3. On considère la fonction auxiliaire

$$\theta : x \in [0, 1] \mapsto -\frac{(1+x)^2}{2} \ln(1+x) + \frac{2}{3}(x^2 + 2x) \ln(2).$$

On note $\theta_i = \theta(x_i)$, $\forall i = 0, \dots, N+1$.

- (a) Montrer que θ est solution d'un problème aux limites de même type que (P).
- (b) Montrer qu'il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\max_{1 \leq i \leq N} \left| -\frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{h^2} + \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2h(1+ih)} - 1 \right| \leq Ch^2.$$

- (c) On définit le vecteur Θ de composantes θ_i . Dédurre de ce qui précède que

$$(A_h \Theta)_i \geq 1 - Ch^2, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

4. (a) Montrer que pour la matrice A_h on a

$$\|A_h^{-1}\|_{\infty} = \|A_h^{-1}e\|_{\infty},$$

où e est le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1.

- (b) Poser $v = A_h^{-1}e$ et utiliser les résultats qui précèdent pour montrer qu'il existe une constante M indépendante de h telle que

$$\|A_h^{-1}\|_{\infty} \leq M.$$

5. En précisant les hypothèses sur u solution de (P), montrer que le schéma converge et préciser l'ordre de convergence obtenu.

Exercice 2 - Principe du maximum

On considère le problème

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

1. On suppose que pour tout f , le système admet une solution unique. Démontrer le principe du maximum : si $f \geq 0$ alors on a $u \geq 0$.
2. On considère l'approximation par différences finies

$$\frac{-u_{j+1} + 2u_j - u_{j-1}}{(\Delta x)^2} = f(x_j), \quad \forall j = 1..N$$

avec $x_j = j\Delta x = \frac{j}{N+1}$ et $u_0 = u_{N+1} = 0$.

Montrer qu'il existe une solution unique au problème discret et qu'elle vérifie le principe du maximum discret : Si $f \geq 0$ alors on a $u_j \geq 0$.

3. Déterminer les solutions du système continu et du système discret pour $f = 1$. En déduire que pour toute donnée f on a $|u_j| \leq \|f\|_\infty / 8$, pour $j = 1..N$.
4. Montrer que pour u suffisamment régulière on a

$$\left| -u''(x_j) - \frac{-u(x_{j+1}) + 2u(x_j) - u(x_{j-1}))}{(\Delta x)^2} \right| \leq C(u)(\Delta x)^2.$$

Ecrire un système d'équations vérifié par l'erreur $e_j = u(x_j) - u_j$ et déterminer une estimation d'erreur en $O((\Delta x)^2)$ pour u suffisamment régulière.

Exercice 3 - Différences finies pour les problèmes d'évolution

On considère le problème de la chaleur en dimension 1 d'espace, avec des conditions de Dirichlet homogènes.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \forall x \in]0, 1[, \forall t \in]0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in]0, 1[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \forall t \in]0, T[, \end{cases} \quad (1)$$

où $u(x, t)$ représente la température au point x et au temps t . On admettra le théorème d'existence et d'unicité suivant :

Théorème. Si $u_0 \in C([0, 1], \mathbb{R})$ alors il existe une unique fonction $u \in C^2(]0, 1[\times]0, T[, \mathbb{R}) \cap C([0, 1] \times [0, T], \mathbb{R})$ qui vérifie (1). On a même $u \in C^\infty(]0, 1[\times]0, T[, \mathbb{R})$, effet "régularisant" de l'équation de la chaleur.

Théorème (Principe du maximum). Sous les hypothèses précédentes, soit u la solution de (1),

1. Si $u_0(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, alors $u(x, t) \geq 0$, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \in]0, 1[$.
2. $\|u\|_{L^\infty([0, 1] \times [0, T])} \leq \|u_0\|_{L^\infty([0, 1])}$.

On va discrétiser en différences finies ce problème. Soit $h = \Delta x = \frac{1}{N+1}$ le pas d'espace et $k = \Delta t = \frac{T}{M}$ le pas de temps. On pose $t_n = nk$ et $x_i = ih$. Les inconnues discrètes sont alors notées $u_i^{(n)}$. On choisit d'approximer en temps par la méthode d'Euler explicite. On approche $u_t(x_i, t_n)$ par le quotient différentiel,

$$\frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{k}$$

et la dérivées en espace $-u_{xx}(x_i, t_n)$ par le quotient différentiel,

$$\frac{2u(x_i, t_n) - u(x_{i-1}, t_n) - u(x_{i+1}, t_n)}{h^2}.$$

1. Ecrire le schéma obtenu.

Il est dit "explicite" car il donne $u_i^{(n+1)}$ de manière explicite en fonction de $(u_i^{(n)})_{i=1..N}$.

2. **Consistance du schéma.** Soit $\bar{u}_i^{(n)} = u(x_i, t_n)$ la valeur exacte de la solution en x_i et t_n . L'erreur de consistance $R_i^{(n)}$ en (x_i, t_n) peut s'écrire comme la somme des erreurs de consistance en temps et en espace. La formuler. Montrer que le schéma est consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

3. **Stabilité.** On va prouver le résultat suivant :

Proposition. *Si la condition de stabilité $\lambda = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ est vérifiée alors le schéma est L^∞ stable au sens où*

$$\sup_{i=1..N, n=1..M} |u_i^{(n)}| \leq \|u_0\|_\infty.$$

- (a) Soit $M^{(n)} = \max_{i=1..N} u_i^{(n)}$. Montrer que $M^{(n+1)} \leq M^{(n)}$.
- (b) Soit $m^{(n)} = \min_{i=1..N} u_i^{(n)}$. Montrer que $m^{(n+1)} \geq m^{(n)}$.
- (c) En déduire le résultat de stabilité.

4. Convergence

Soit u la solution de (1) et $(u_i^{(n)})$ la solution du problème discret. On appelle erreur de discrétisation au point (x_i, t_n) la quantité $e_i^n = u(x_i, t_n) - u_i^{(n)}$.

Montrer le résultat de convergence suivant :

Théorème. *Sous les hypothèses précédentes, il existe $C \in \mathbb{R}^+$ ne dépendant que de u tel que*

$$\|e_i^{(n+1)}\|_\infty \leq \|e_i^{(0)}\|_\infty + T C(k + h^2), \quad \forall i = 1 \cdots N, \forall n = 0 \cdots M-1.$$

Si $\|e_i^{(0)}\|_\infty = 0$ alors $\max_{i=1..N} \|e_i^{(n)}\|$ tend vers 0 lorsque k et h tendent vers 0 pour tout $n = 1 \cdots M$. Le schéma est donc convergent.