

# Introduction to data assimilation

## An example of application in industry

Laurent Dumas

Laboratoire de Mathématiques de Versailles (LMV)  
Versailles University

Short course, University of Mauritius, January 10th, 2019

# Introduction

- Data Assimilation (DA) basically combines different sources of information in order to produce the best possible estimate of the state of a system
- These sources generally consist of observations of the system and of physical laws describing its behaviour often represented in the form of a numerical model.
- In a broad sense, the question is : how to predict the evolution of a system, knowing its past when the model and the measurements are known with a finite accuracy ?

# Description du problème d'ingénierie

- Internest a pour ambition d'assister drones et hélicoptères dans leurs opérations critiques pour améliorer la sécurité des vols.



# Description du problème d'ingénierie

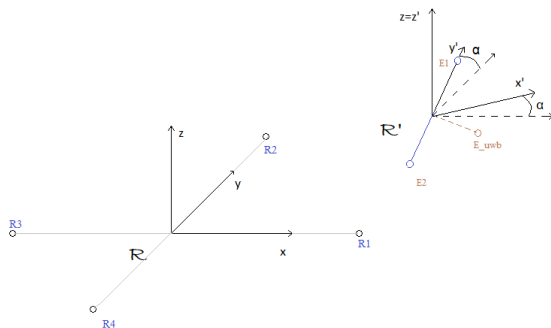
- Pour cela, l'équipe d'Interneet a développé LoLaS (Local Landing System), un système embarqué comprenant des composants hardware ainsi que leur firmware.
- Grâce à la fusion de technologies, LoLaS fournit des informations de positionnement robustes et précises quel que soit la visibilité, la météo et l'environnement.
- L'objectif de l'étude était de valider l'outil de guidage utilisé.

# Modélisation mathématique du problème

- Deux technologies de positionnement adaptées aux conditions extrêmes sont utilisées ici : les *ultra sons (US)* et l'*Ultra-Wide-band (UWB)*.
- Les quantités mesurées sont donc des distances entre chaque émetteur (3 sur le drone) et chaque récepteur (4 au sol).
- Le drone est supposé stable, à savoir que les angle de roulis et de tangage sont nuls (seul l'angle de lacet est non nul).
- Toutes les mesures ont une précision limitée (quelques centimètres) et peuvent être défaillantes en différents instants (présence de réflexions parasites).

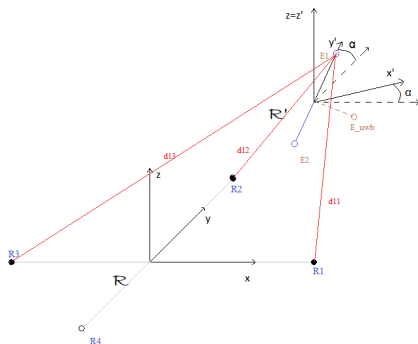
# Modélisation mathématique du problème

- Le système de guidage consiste en :
  - 4 récepteurs au sol  $R_1(r, 0)$ ,  $R_2(0, r)$ ,  $R_3(-r, 0)$ ,  $R_4(0, -r)$ ,
  - 2 émetteurs US sur le drone  $E_1(0, r')$ ,  $E_2(0, -r')$ ,
  - 1 émetteur UWB sur le drone  $E_{UWB}(x_{UWB}, y_{UWB})$ .
- On définit la position du drone par les variables  $(x, y, z, \alpha)$  et on note  $d_{ij}$  la distance entre l'émetteur  $E_i$  et le récepteur  $R_j$  et par  $d_j$  la distance entre  $E_{UWB}$  et  $R_j$ .



# Première approche : principe de trilatération

- La trilatération est une technique géométrique qui permet de trouver la position d'une cible en mesurant trois distances.
- Dans le cas présent, il est possible de déterminer la position du drone avec deux trilatérations, une pour chaque émetteur US.
- Cette approche purement déterministe, ne prend pas en compte les bruits de mesure.



## Seconde approche : prise en compte des bruits de mesure

- Les équations d'état et d'observation s'écrivent pour  $t \in \mathbb{N}$  :

$$X_k = X_{k-1} + q_k$$

$$Y_k = h(X_k) + r_k$$

$$\text{où } X_k = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha \end{pmatrix}, h(X_k) = \begin{pmatrix} d11 \\ d12 \\ d13 \\ d14 \\ d21 \\ d22 \\ d23 \\ d24 \\ d1 \\ d2 \\ d3 \\ d4 \end{pmatrix} \text{ et } q_k \text{ et } r_k \text{ sont des bruits gaussiens}$$

centrés, indépendants et de matrice de covariance  $Q$  et  $R$ .



# Principe du filtrage de Kalman (cas linéaire)

- Entrées :

$x_{k-1}$  : l'estimation de l'état à l'itération précédente,

$P_{k-1}$  : l'erreur associée à l'estimation (matrice de covariance),

$y_k$  : les mesures à l'itération  $k$ ,

$R, Q$  : les deux matrices de covariance,

$F, H$  : les deux matrices dans les équation d'état et d'observation.

- Sorties :

$x_k$  : l'estimation de l'état à l'itération  $k$ ,

$P_k$  : la nouvelle matrice de covariance associée à l'état.

- *Etape de prédiction :*

$$\hat{x}_{k|k-1} = Fx_{k-1}$$

$$P_{k|k-1} = FP_{k-1}F^T + Q$$

- *Etape de fusion :*

$$K = P_{k|k-1}H^T(HP_{k|k-1}H^T + R)^{-1}$$

$$x_k = \hat{x}_{k|k-1} + K(y_k - H\hat{x}_{k|k-1})$$

$$P_k = (I - KH)P_{k|k-1}$$

# Principe du filtrage de Kalman étendu (EKF)

- Entrées :

$x_{k-1}$ ,  $P_{k-1}$ ,  $y_k$  : idem,

$f$  : la fonction dans l'équation d'état,

$J_f$  le jacobien de  $f$ ,

$h$  : la fonction dans l'équation d'observation,

$J_h$  le jacobien de  $h$ .

- Sorties : idem que précédemment.

- *Etape de prédiction :*

$$\hat{x}_{k|k-1} = f(x_{k-1})$$

$$F = J_f(x_{k-1})$$

$$P_{k|k-1} = FP_{k-1}F^T + Q$$

- *Etape de fusion :*

$$H = J_h(x_{k|k-1})$$

$$K = P_{k|k-1}H^T(HP_{k|k-1}H^T + R)^{-1}$$

$$x_k = \hat{x}_{k|k-1} + K(y_k - h(\hat{x}_{k|k-1}))$$

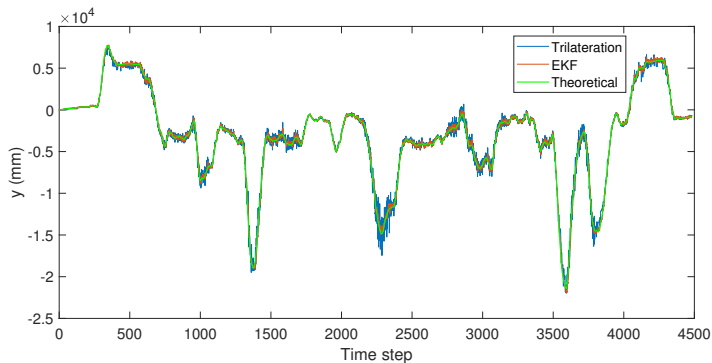
$$P_k = (I - KH)P_{k|k-1}$$

# Premiers résultats sur des vols simulés

- Les méthodes de trilatération et de filtrage EKF ont été comparées pour des vols simulés avec la seule technologie US et seulement trois récepteurs.
- La procédure est la suivante :
  - 1 Une trajectoire théorique est simulée ainsi que des observations de position par US.
  - 2 Un bruit gaussien est ajouté aux observations avec une matrice de covariance fixée.
  - 3 Les erreurs moyennes sur le vol (MSE) avec la méthode de trilatération et la méthode EKF sont comparées.

# Résultats sur des vols simulés

- La reconstruction de la deuxième coordonnée  $y$  est comparée sur la figure ci-dessous.



- On peut observer que la méthode EKF présente beaucoup moins d'oscillations que la méthode de trilatération.

# Résultats sur des vols simulés

- Sur l'ensemble du vol, on obtient les erreurs suivantes :

	<b>EKF</b>	<b>Trilatération</b>
<b>MSE x (mm)</b>	200.26	312.33
<b>MSE y (mm)</b>	181.78	613.12
<b>MSE z (mm)</b>	270.04	551.27
<b>MSE <math>\alpha</math> (rad)</b>	0.49	1.72
<b>MSE globale</b>	441.72	1009.7

- La méthode EKF donne très largement de meilleurs résultats que la méthode de trilatération et sera retenue pour la suite de l'étude.

# Conclusions

- Il ressort de l'étude préliminaire réalisée dans le cadre de la collaboration IMOSE/Interneet, que la fusion de données par un filtre de Kalman étendu (EKF) permet de restituer la position précise d'un drone dans différentes configurations de vol.
- La prédiction de l'angle de lacet est plus difficile que celle de la position pour plusieurs raisons (nécessité de plus de mesures, sensibilité plus forte aux erreurs) et doit être encore affinée.