Mini-cours UQ, UOM, janvier 2019
Laurent Dumas
Université de Versailles-Saint Quentin

Uncertainty quantification and orthogonal polynomial basis

Exercice 1. Legendre polynomials On pose $< f, g >= \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)$ et pour tout entier n on définit le polynôme de Legendre P_n par

$$Q_n(X) = (X^2 - 1)^n,\ P_n(X) = \frac{n!}{(2n)!} Q_n^{(n)}.$$

i) Déterminer le degré de P_n ainsi que le coefficient du terme de plus haut degré.

ii) Justifier que $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

iii) Déterminer les racines de Q_n ainsi que leur multiplicité.

iv) Montrer que P_n a au moins n racines dans l'intervalle $]-1, 1[$.

v) Donner le nombre exact de racines de P_n ainsi que leur multiplicité.

vi) Etablir que $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on a :

$$\int_{-1}^{1} P^{(n+1)}(t)Q(t)\,dt \ = \ \sum_{k=0}^{n} \Big[P^{(n-k)}(t)Q^{(k)}(t)\Big]_{-1}^{1} + (-1)^{n+1} \int_{-1}^{1} P(t)Q^{(n+1)}(t)\,dt. \tag{1}$$

vii) En déduire que pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_{(n+1)}(t)Q(t)\,dt \ = \ 0$

viii) Montrer que les polynômes P_n vérifient la relation de récurrence :

$$P_n(x) = (x - \lambda_n)\,P_{n-1}(x) - \mu_n\,P_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

avec

$$\lambda_n = \frac{< xP_{n-1}, P_{n-1} >}{\|P_{n-1}\|_2^2}, \qquad \mu_n = \frac{\|P_{n-1}\|_2^2}{\|P_{n-2}\|_2^2}.$$

Montrer que $\lambda_n = 0$ et en déduire une relations de récurrence pour le calcul des polynômes de Legendre :

$$nL_n(x) = (2n - 1)xL_{n-1}(x) - (n - 1)L_{n-2}(x).$$

avec $L_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} P_n$.

Exercice 2. Legendre polynomials and Gauss quadrature : On note $a_0, \cdots, a_n$ les racines distinctes du polynôme de Legendre P_{n+1} de degré n.

i) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ telle que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = (P(a_0), \cdots, P(a_n))$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

ii) En déduire que pour tout $f \in \mathcal{C}([-1,1])$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$, on ait $P(a_i) = f(a_i)$. On notera $P = P_f$ cet unique polynôme déterminé par f.

On pose $L_i = \displaystyle\prod_{k=0, k\neq i}^{n} (X - a_k)$.

iii) Pour $i, j \in \{0, \cdots, n\}$, calculer $L_i(a_j)$.

iv) Justifier que la famille $\mathcal{L} = (L_0, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

v) Soit $f \in \mathcal{C}([-1,1])$, exprimer les coordonnées $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ de P_f dans $\mathcal{L}$ à l'aide des valeurs de f et L_i en a_i.

vi) On pose $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\, dt$ et $J(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_f(t)\, dt$. Montrer que

$$J(f) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(a_i), \tag{2}$$

oô $(\omega_i)_{i=0}^n$ sont des réels que l'on exprimera en fonction des L_i et des a_i.

vii) Montrer que la formule de quadrature est au moins d'ordre n.

viii) Montrer que la formule de quadrature est d'ordre $2n+1$. **Indication :** Pour $Q \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, on effectuera la division euclidienne de Q par P_{n+1} (le polynôme de Legendre de degré $n+1$).

ix) Etablir que les $\omega_i > 0 \ \forall i \in \{0, .., n\}$.

x) Trouver la formule de Gauss dans le cas $n = 1$ (formule à 2 points d'ordre 3).

xi) Trouver la formule de Gauss dans le cas $n = 2$ (formule à 3 points d'ordre 5).

xii) Calculer $\displaystyle\min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (e^{-x} - a - bx - cx^2)^2\, dx$ et montrer que ce minimum est atteint pour une seule valeur (a, b, c) que l'on déterminera.

Exercice 3. Erreur de l'intégration numérique de Gauss - fin Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$. On pose $M = \displaystyle\sup_{t\in[-1,1]} \left| f^{(2n+2)}(t) \right|$.

i) On pose T_f la partie réguliére du développement de Taylor de f à l'ordre $2n+1$ en 0. En utilisant une formule de Taylor-Lagrange, montrer que

$$|I(f) - I(T_f)| \leq \frac{2M}{(2n+3)!}. \tag{3}$$

ii) Démontrer de même que

$$|J(f) - J(T_f)| \leq \frac{2M}{(2n+2)!}. \tag{4}$$

iii) En déduire une majoration de $|I(f) - J(f)|$.