

Etude et implémentation de quelques modèles d'écoulements artériels

Laurent Dumas

Laboratoire de Mathématiques de Versailles
Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines

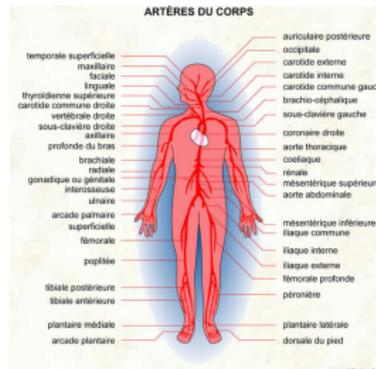
Ecole de printemps, Rouen, 4 juin 2013
<http://dumas.perso.math.cnrs/rouen.html>

- 1 Modélisation des écoulements sanguins
- 2 Problème inverse et optimisation
- 3 Simulation numérique des écoulements sanguins
- 4 Conclusion

- 1 Modélisation des écoulements sanguins
- 2 Problème inverse et optimisation
- 3 Simulation numérique des écoulements sanguins
- 4 Conclusion

Présentation du problème

- La modélisation et la simulation numérique des écoulements sanguins dans l'arbre artériel est un problème général complexe car elle nécessite des simulations tridimensionnelles avec interaction fluide-structure.



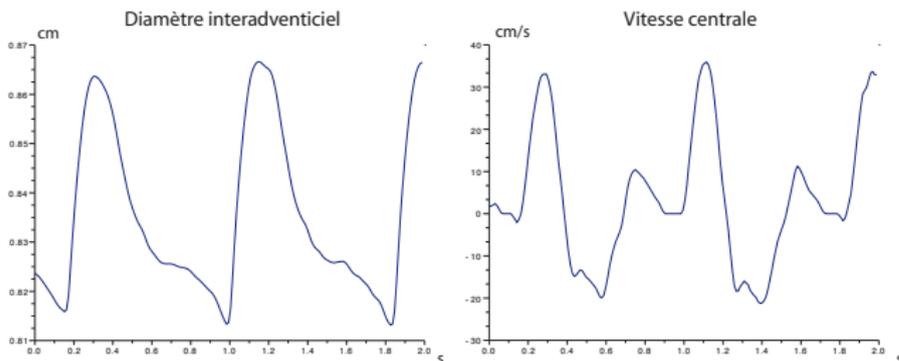
- Une des difficultés de cette modélisation est la **détermination précise des nombreux paramètres du modèle pour un patient donné.**

Présentation du problème

- Afin de réduire les coûts de telles simulations, des modèles simplifiés monodimensionnels d'interaction fluide structure avec bifurcation d'artères ont été développés.
- Le but est ici de **reconstruire fidèlement à l'aide de mesures non invasives toutes les variables hémodynamiques et mécaniques d'un patient donné** (pression, vitesse, modules de Young, etc...) pour l'ensemble de son réseau artériel.
- Grâce à une telle reconstruction, le praticien disposera d'informations utiles à un dépistage précoce des principales maladies cardiovasculaires.

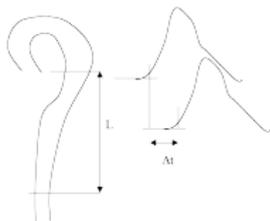
Dispositif expérimental

- Les données d'echotracking utilisées ici ont été fournies par l'équipe de pharmacologie de l'Hopital Georges Pompidou.
- Parmi les données disponibles pour différents patients, les **mesures temporelles de diamètre d'artère et de vitesse centrale** seront utilisées ici :



Dépistage des maladies cardiovasculaires

- Actuellement, le test associé de dépistage des maladies cardiovasculaires est basée sur le calcul d'un paramètre appelé PWV (Pulse Wave Velocity).

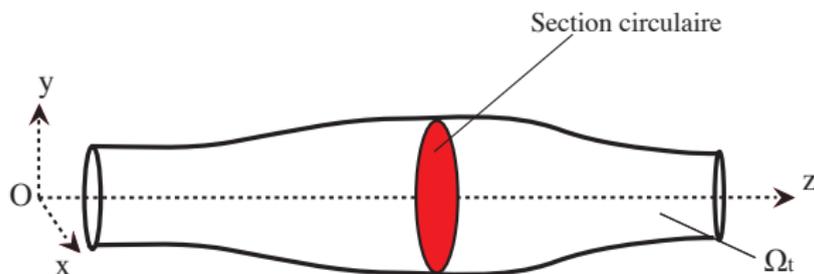


- Ce coefficient est relié à la rigidité de l'artère à l'aide de la relation :

$$PWV = \frac{L}{\Delta t} = \sqrt{\frac{Eh}{2r\rho}}$$

où E désigne le module de Young de l'artère.

Modélisation du flux sanguin : hypothèses



- Pour chaque artère, le domaine Ω_t est cylindrique, orienté selon Oz , et de longueur constante L .
- Les quantités impliquées sont supposées constantes sur chaque section de l'artère.
- Références : *Formaggia, Nobile, Quarteroni (2001), Sherwin et al. (2003), Gerbeau et al. (2005)*.

Dérivation des équations du modèle

- Après intégration des équations de Navier Stokes sur chaque section, on obtient le système d'inconnues $A_i(t, z)$ (section de l'artère) et $Q_i(t, z)$ (débit moyen) relatif à l'artère i :

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial Q_i}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q_i^2}{A_i} \right) + \frac{A_i}{\rho} \frac{\partial P_i}{\partial z} + K_r \frac{Q_i}{A_i} = 0$$

- Une loi de comportement linéaire élastique complète le système :

$$P_i - P_{ext} = \beta_i(z) \left(\sqrt{A_i(z, t)} - \sqrt{A_{0,i}(z)} \right)$$

Les paramètres du modèle

- Le paramètre K_r représente la résistance visqueuse de l'écoulement par unité de longueur du tube et est considéré connu dans cette étude.
- Les principaux paramètres devant être estimés sont **les coefficients β_i de chaque artère**. Cette valeur, proportionnelle à la rigidité de l'artère peut être constante ou dépendre de z . Il existe une valeur théorique de β_i issu d'une moyennisation formelle :

$$\beta_i(z) = \frac{4\sqrt{\pi}h_0E_i(z)}{3A_0}$$

où h_0 et $E_i(z)$ représentent respectivement l'épaisseur et le module de Young de l'artère i .

- Un autre paramètre important du modèle est **la section de l'artère i au repos** $z \rightarrow A_{0,i}(z)$.

Forme conservative du modèle

- Le modèle précédent peut être réécrit sous forme conservative :

$$\frac{dU}{dt} + \frac{dF(U)}{dz} = B(U)$$

où $U = (A, Q)^t$ et $F(U) = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + \frac{\beta}{3\rho} A^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$.

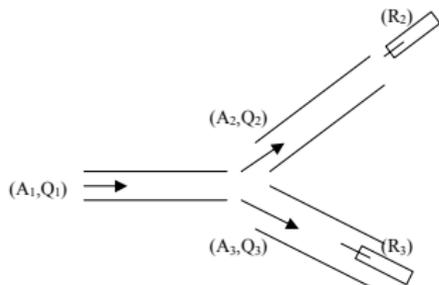
- Il peut être observé que ce système est hyperbolique et que le Jacobien $H = \frac{dF}{dU}$ admet toujours deux valeurs propres réelles de signe opposé pour les valeurs admissibles de U :

$$\lambda_i = \frac{Q}{A} \pm c \text{ où}$$

$$c = \sqrt{\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial A}}$$

Conditions aux limites

- Le système est complété par deux conditions aux limites appropriées pour les variables caractéristiques W_1 et W_2 . En particulier, une pression (ou une section) peut être imposée en entrée.
- Aux bifurcations, trois conditions additionnelles sont imposées (conservation de la masse et deux conditions sur la pression).
- Aux sorties, une condition numérique artificielle correspondant à une résistance équivalente du réseau en aval est imposée.



Résolution numérique du problème direct

- Les équations du modèle 1D sont discrétisées en temps sous leur forme conservative, en utilisant un schéma de Taylor-Galerkin au second ordre.
- La discrétisation spatiale est alors réalisée à l'aide d'éléments finis linéaires sur une subdivision de $[0, L]$.
- A chaque itération en temps, une méthode de Newton permet de déterminer les 6 inconnues aux points de bifurcation.

Problème inverse : la fonction coût

- En vue de la construction d'un réseau artériel utilisant les résultats d'un echotracking, la fonction coût à minimiser est du type suivant :

$$J(\beta_i, \dots) = \sum_{pts \in \{P_1, \dots, P_N\}} \sum_{i=1}^M (errA(t_i, pts) + errQ(t_i, pts))$$

avec

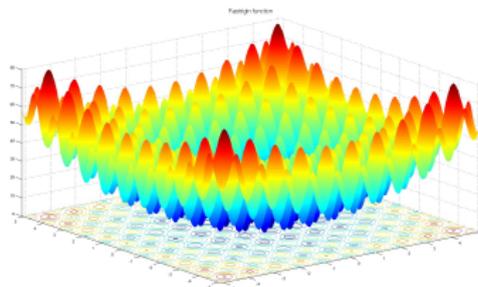
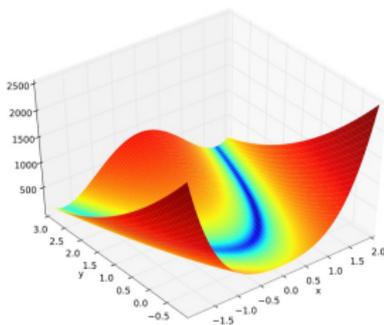
$$\begin{cases} errA(t_i, pts) = |A(t_i, pts) - A_{exp}(t_i, pts)|^2 \\ errQ(t_i, pts) = |Q(t_i, pts) - Q_{exp}(t_i, pts)|^2 \end{cases}$$

- Les nombres minimaux N de points en espace et M de points en temps, permettant de reconstruire correctement le flux sanguin β doivent en particulier être déterminés.

- 1 Modélisation des écoulements sanguins
- 2 Problème inverse et optimisation**
- 3 Simulation numérique des écoulements sanguins
- 4 Conclusion

Problème d'optimisation à résoudre

- Le problème inverse précédent se ramène à la recherche de l'**optimum global** d'une fonction $J : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
- Dans le cas présent, la fonction J est évaluée à partir de la résolution d'une EDP ou d'un système d'EDP, ici le système couplé d'EDP sur le réseau d'artères.



Méthodes existantes

- La famille de méthode la plus répandue consiste à utiliser le gradient de la fonction J (si celui-ci existe) pour construire une suite convergente d'approximations d'un minimum local de J (méthode de **gradient ou plus forte pente**) :

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n \nabla J(x_n)$$

- L'utilisation d'informations d'ordre 2 sur la fonction J (si celle-ci est C^2) permet d'améliorer la vitesse de convergence des méthodes précédentes (méthode de **Newton**) :

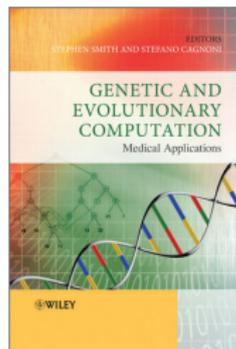
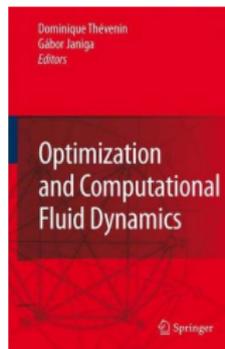
$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n \nabla^2(x_n)^{-1} \cdot \nabla J(x_n)$$

Méthodes existantes

- L'estimation du gradient de la fonction est dans le cas présent difficile à obtenir, d'où la nécessité de recourir à des méthodes d'**optimisation sans dérivées**.
- Une première catégorie de méthodes d'optimisation sans dérivées est basée sur l'étude de l'évolution d'un **simplexe** (famille libre de $n + 1$ points dans \mathbb{R}^n).
- Une autre catégorie de méthodes, de nature stochastique, appelée méthodes évolutionnaires, s'est développé récemment avec l'essor des outils informatiques.

Algorithmes évolutionnaires : historique

- Les algorithmes évolutionnaires (**algorithmes génétiques, stratégies d'évolution, PSO, etc...**) sont des méthodes stochastiques d'optimisation qui tirent leur nom d'une analogie avec certaines lois d'évolution biologiques, voire économiques.
- Références : *Holland* (1976), *Goldberg* (1989), *Cerf* (1994), *Schoenaueur* (1996), *Hansen* (2001), etc...



Principe général d'un algorithme génétique (GA)

- Choix d'une population initiale $P_1 = \{X_i^1 \in \mathcal{O}, 1 \leq i \leq N_p\}$
- for n_g from 1 to N_{gen}
- **Evaluation** de $\{J(X_i^{n_g}), 1 \leq i \leq N_p\}$.
- for k from 1 to $\frac{N_p}{2}$
 - **Selection** de $(X_\alpha^{n_g}, X_\beta^{n_g})$ en fonction de leur facteur de santé.
 - **Croisement** : remplacer $(X_\alpha^{n_g}, X_\beta^{n_g})$ par $(Y_\alpha^{n_g}, Y_\beta^{n_g})$.
 - **Mutation** : remplacer $(Y_\alpha^{n_g}, Y_\beta^{n_g})$ par $(Z_\alpha^{n_g}, Z_\beta^{n_g})$.
- end for
- Generation de la nouvelle population P_{n_g} .
- end for

Principe général d'une stratégie d'évolution (ES)

- Choix d'une population initiale de μ parents :
$$P_1 = \{X_i^1 \in \mathcal{O}, \quad 1 \leq i \leq \mu\}$$
- for n_g from 1 to N_{gen}
- Creation d'une population de $\lambda \geq \mu$ enfants O_{n_g} par :
 - **Croisement** à ω parents $Y_i^{n_g} = \frac{1}{\omega} (\sum_{j=1}^{\omega} X_j^{n_g})$
 - **Mutation** : remplacer $Y_i^{n_g}$ par $Z_i^{n_g}$
 - **Evaluation** de $\{J(Z_i^{n_g}), 1 \leq i \leq \lambda\}$
- **Selection** des meilleurs μ parents dans la population $P_{n_g} \cup O_{n_g}$.
- end for

Principe général d'un essaim de particules (PSO)

- Choix d'une population initiale
 $P_1 = \{(X_i^1, v_i^1, p_i^1), 1 \leq i \leq N_p\}$ de particules ayant la position actuelle $X_i \in \mathcal{O}$, la vitesse v_i et une meilleure position p_i .
- for n_g from 1 to N_{gen}
- **Evaluation** de $\{J(X_i^{n_g}), 1 \leq i \leq N_p\}$.
- Actualisation de la meilleure position individuelle et globale ($p_g^{n_g}$)

- **Calcul** des nouvelles vitesses de chaque particule :

$$v_i^{n_g+1} = \omega v_i^{n_g} + c_1 \rho_1 (p_i^{n_g} - x_i^{n_g}) + c_2 \rho_2 (p_g^{n_g} - x_i^{n_g})$$

- **Calcul** des nouvelles positions de chaque particule :

$$X_i^{n_g+1} = X_i^{n_g} + v_i^{n_g+1}$$

- end for

Un résultat de convergence pour les ES

- Il existe **très peu de résultats de convergence** des Algorithmes Evolutionnaires.
- La plupart de ces résultats concernent des fonctions sphériques : $J(x) = g(\|x\|^2)$ avec g croissante.
- Soit par exemple une stratégie d'évolution $(1, 1)$ représentée par la suite de vecteurs aléatoires (X_n) et ayant une mutation gaussienne de variance $\sigma\|X_n\|$. Sous certaines hypothèses techniques et pour une fonction sphérique, X_n converge presque sûrement vers le minimum de J et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{\|X_n\|}{\|X_0\|} \right) = c < 0$$

- 1 Modélisation des écoulements sanguins
- 2 Problème inverse et optimisation
- 3 Simulation numérique des écoulements sanguins**
- 4 Conclusion

Simulation numérique d'une artère saine

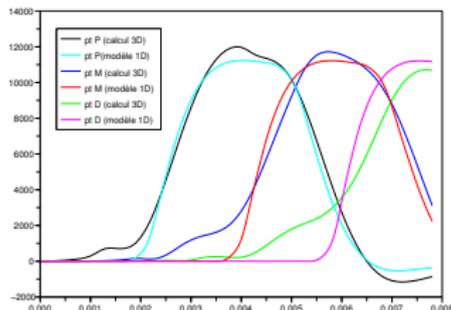
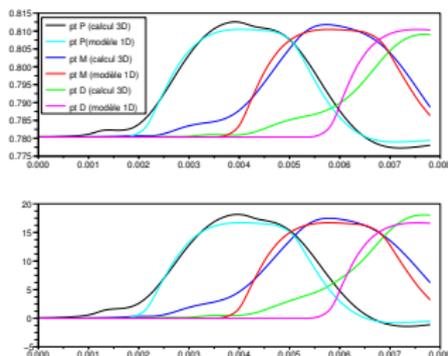
- L'objectif de cette première simulation est d'ajuster le modèle 1D aux résultats d'un modèle 3D existant (calculé à l'aide du logiciel LifeV).



- Un algorithme génétique est utilisé ici pour déterminer la valeur optimale de β . La fonction coût est basée sur les profils de A et Q en trois positions.

Simulation numérique d'une artère saine

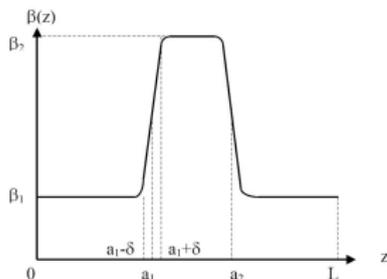
- Il s'avère en fait possible de retrouver les résultats du modèle 3D à un coût largement moindre.



- A noter aussi que le coefficient β optimal est largement inférieur à celui issu d'une dérivation formelle.

Simulation numérique d'une artère sténosée

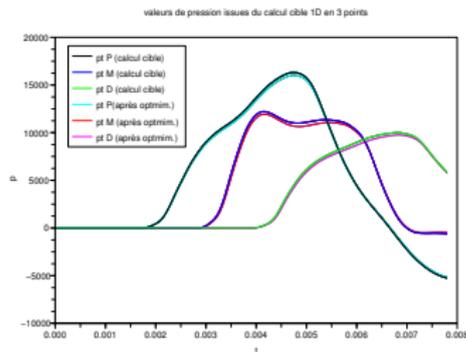
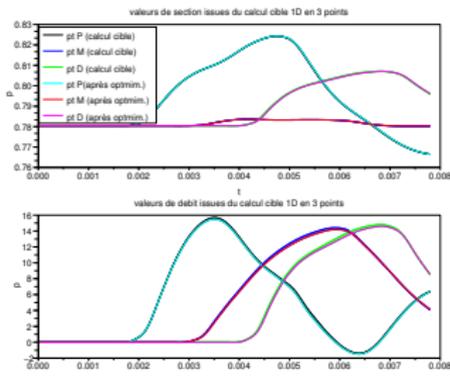
- L'objectif de cette nouvelle simulation est de reconstruire la fonction de rigidité d'une artère $z \mapsto \beta(z)$ en supposant que celle-ci est du type suivant :



- Les 4 inconnues associées sont la position et la rigidité de la plaque : a_1 , a_2 , β_1 et β_2 .
- Les problèmes inverses présentés ici sont construits à partir de données synthétiques calculées avec le modèle 1D.

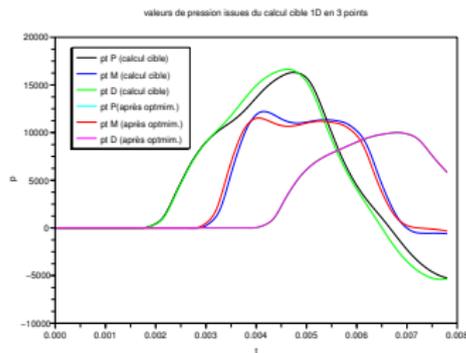
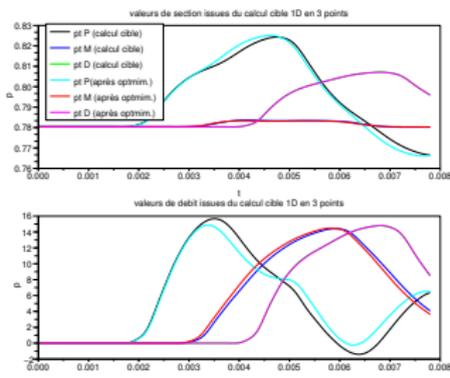
Simulation numérique d'une artère sténosée

- Quand les profils de A et Q sont connus en 3 positions différentes, il est possible de reconstruire la forme exacte de la fonction de rigidité.



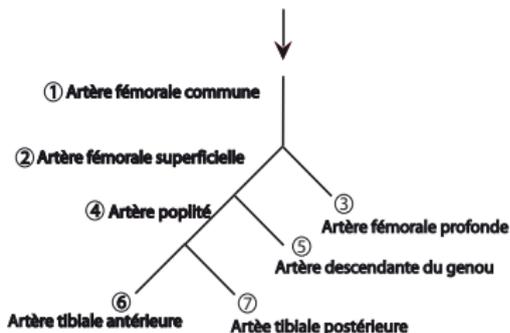
Simulation numérique d'une artère sténosée

- Quand les profils de A et Q sont connus seulement en une position en aval du saut de rigidité, il est encore possible de localiser la plaque et de donner une estimation du saut de rigidité, assez peu précise cependant.



Simulation numérique des artères d'un patient sain

- La simulation présentée ici a consisté à **reconstruire le réseau artériel des membres inférieurs d'un patient sain** à l'aide de mesures non invasives par echotracking en quelques points du réseau.



- Le modèle fluide-structure simplifié précédent a été utilisé pour modéliser le réseau artériel. Le problème inverse à résoudre possède pour inconnues les paramètres physiques et numériques du modèle.

Simulation numérique des artères d'un patient sain

- La fonction coût à minimiser est construite à partir des 4 mesures réalisées par echotracking :

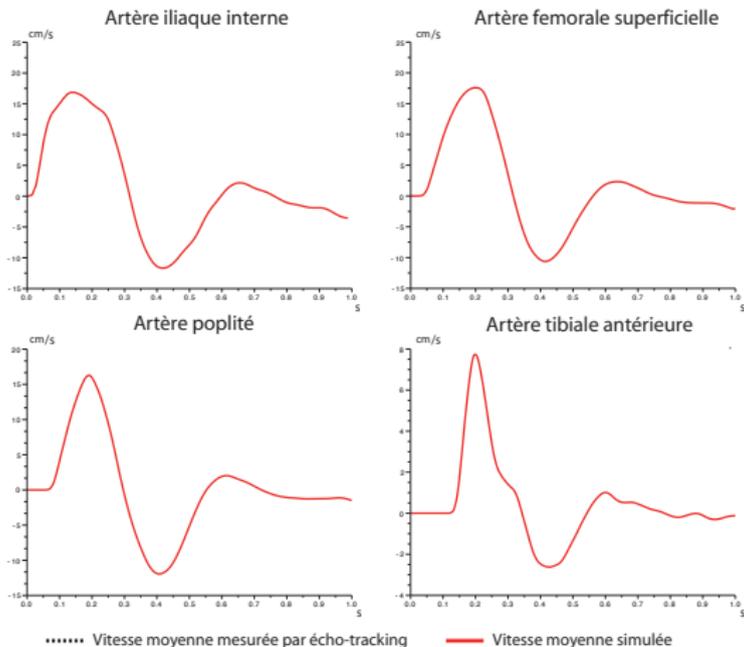
$$J_2(\psi) = \sum_{k \in \{1,2,4,6\}} \frac{\|\tilde{Q}(\psi, k) - Q_{echo}(k)\|_{l_2}}{\|Q_{echo}(k)\|_{l_2}}$$

où les paramètres ψ à déterminer sont :

- Les coefficients β de chacune des artères du réseau : β_i , $i \in \{1, \dots, 7\}$.
- Les coefficients R_t réglant les résistance en sortie de réseau : R_t^i , $i \in \{3, 5, 6\}$.

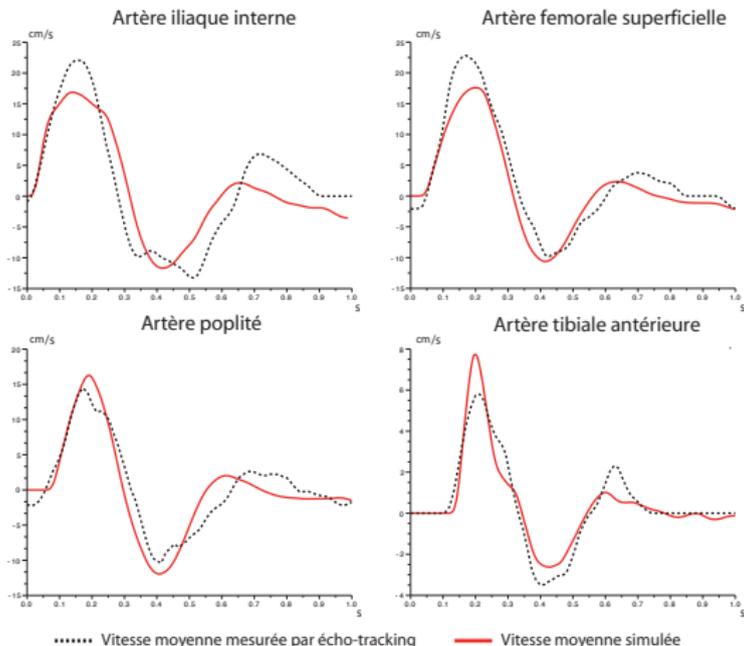
Simulation numérique des artères d'un patient sain

Patient 1 : résultats obtenus avec la fonction J_Q^2



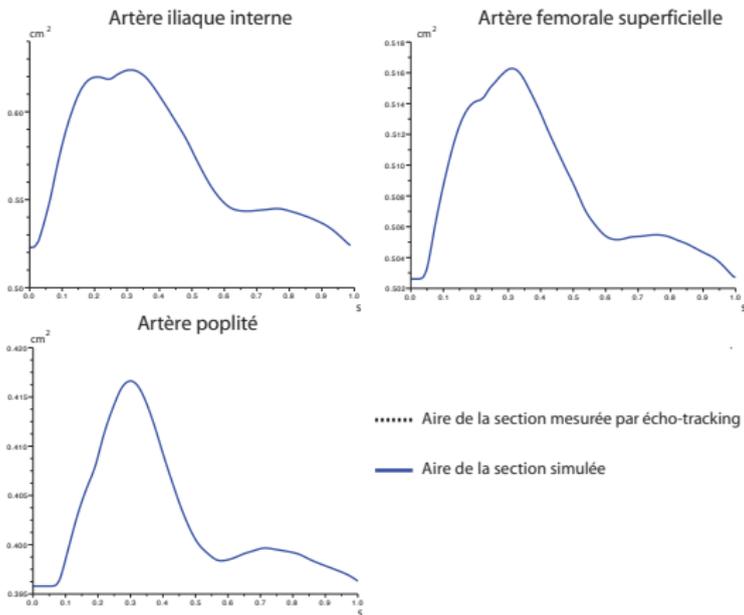
Simulation numérique des artères d'un patient sain

Patient 1 : résultats obtenus avec la fonction J_Q^2



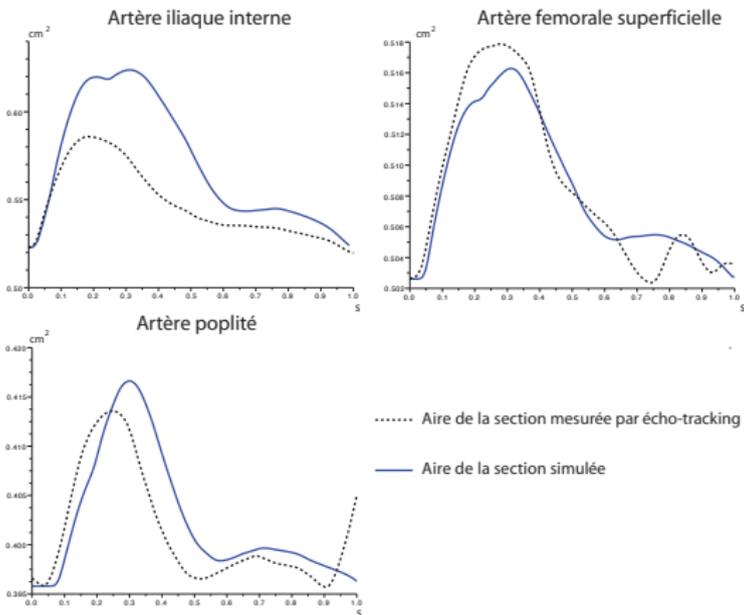
Simulation numérique des artères d'un patient sain

Patient 1 : résultats obtenus avec la fonction J_Q^2



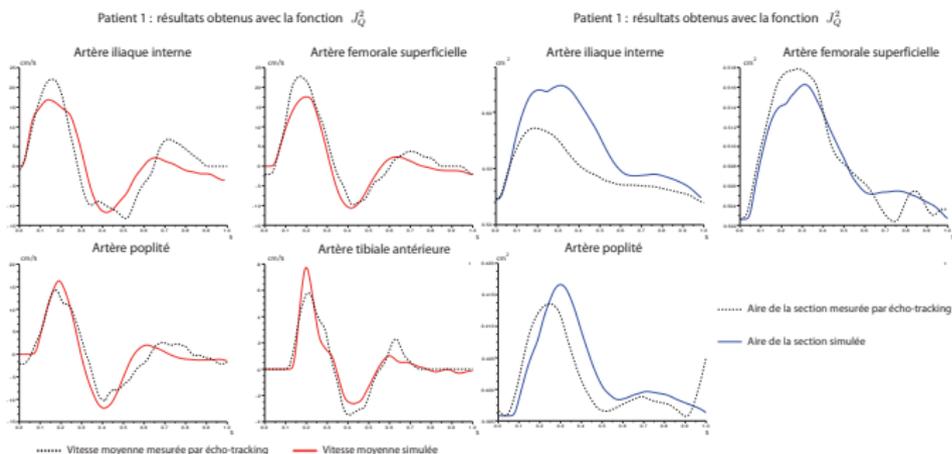
Simulation numérique des artères d'un patient sain

Patient 1 : résultats obtenus avec la fonction J_Q^2



Simulation numérique des artères d'un patient sain

- Profils d'aire et de vitesse pour les 4 artères :



- Autres informations mises à la disposition du praticien : profils de pression, coefficients de rigidité des 7 artères, etc...

Conclusions et perspectives

- La simulation numérique est un outil d'aide au diagnostic de plus en plus utilisée dans différents domaines médicaux.
- Les méthodes évolutionnaires d'optimisation sont les plus efficaces dans ce contexte pour déterminer les paramètres du modèle utilisé, spécifiques à chaque patient.
- L'introduction de modèles approchés s'avère en général indispensable pour obtenir un temps de calcul raisonnable.
- Les travaux présentés ici montrent qu'un examen non invasif et peu coûteux comme l'echotracking couplé à une simulation numérique du flux sanguin pourra améliorer la prédiction des risques de maladies cardiovasculaires.